

Selected problems of dynamic systems theory (WELEDCSM - SPDS)

Contents:

1. INTRODUCTORY NOTIONS OF DYNAMIC SYSTEMS - 3
Definition of dynamic systems, linear and nonlinear systems, continuous and discrete time systems, stationarity, deterministic and stochastic systems, chaotic systems, examples of chaotic systems. Description of dynamic systems in state space, linear approximation of nonlinear description
2. STATE SPACE DESCRIPTION OF LINEAR CONTINUOUS SYSTEMS - 6
Eigenvalues and eigenvectors, general form solution of state space equations. stability of dynamic systems, Lyapunov conditions of local and global stability.
3. DESCRIPTION OF CONTINUOUS TIME SYSTEMS IN COMPLEX FREQUENCY DOMAIN - 20
Laplace transformation, transfer function description of linear systems, impulse and step responses, frequency characteristics, different form descriptions of dynamic systems, second order systems and their characteristics.
4. STABILITY THEORY OF LINEAR CONTINUOUS SYSTEMS - 39
Stability on the basis of transfer function, criteria of stability: Routh-Hurwitz criterion of linear time-invariant systems, Bode plots, margin of stability: gain margin and phase margin. Examples of margin determination.
5. FEEDBACK SYSTEMS - 46
Feedback structures, positive and negative feedback, Nyquist plot, stabilization of feedback systems, examples of feedback systems.
6. DISCRETE TIME SYSTEMS - 57
Descriptions of discrete systems: state space and transfer function Z-description, transformations between both descriptions, examples of transformations, FIR and IIR systems
7. STABILITY OF DISCRETE TIME SYSTEMS - 64
Stable transformations from continuous time to discrete time systems, BIBO stability, Lyapunov stability criteria of discrete time systems.
8. DYNAMIC MODELS OF ELECTRIC MACHINES - 80

Shunt and series DC machines, state space model of DC machines in Simulink. dynamic model of induction motor, Simulink implementation of the model.

9. DYNAMIC MACROMODEL OF POWER SYSTEM FOR FREQUENCY

STABILIZATION - 94

Feedback structure for speed stabilization in power systems, cooperation of power systems, Simulink implementation of power macromodel, analysis of work at different loading conditions.

10. INTRODUCTION TO CHAOTIC SYSTEMS - 103

Definition of chaos, Lyapunov exponents, bifurcation, strange attractors, examples of chaotic systems.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA SYSTEMÓW (Introductory notions of dynamic systems)

System (układ) dynamiczny jest rozumiany jako model matematyczny rzeczywistego zjawiska, którego ewolucja jest wyznaczona jednoznacznie przez stan początkowy. Jest najczęściej opisany pewnym wektorowym równaniem różniczkowym lub różnicowym zwanym równaniem stanu. Teoria układów dynamicznych stanowi ważny dział matematyki znajdujący liczne zastosowania przy opisie konkretnych zjawisk, m.in. w modelowaniu rzeczywistych układów i urządzeń, w teorii sterowania itp.

W opisie matematycznym wyróżnia się **systemu czasu ciągłego** (zwane w skrócie systemami analogowymi lub ciągłymi –continuous time systems) **bądź czasu dyskretnego** (discrete time systems). Opis ciągły pozwala na określenie stanu systemu w dowolnej chwili czasowej. Zwykle stosuje się do niego układ równań różniczkowych zwyczajnych. Opis typu dyskretnego zakłada reprezentację systemu w dyskretnych chwilach czasowych $t=nT_s$, gdzie T_s oznacza okres próbkowania, a n oznaczenie kolejnej chwili czasowej. Opis tego systemu może być przedstawiony w postaci układu równań różnicowych, stanowiących odpowiednik równań różniczkowych dla układu ciągłego.

System może być **liniowy bądź nieliniowy**, w zależności od typu opisu matematycznego. Jeśli opis równaniami różniczkowymi zawiera w sobie zależności nieliniowe, wówczas traktujemy go jako system nieliniowy, w przeciwnym wypadku liniowy.

System uważa się za **stacjonarny**, jeśli parametry opisujące go nie zależą od czasu. W przeciwnym przypadku system jest **niestacjonarny**. W kontekście układów nieliniowych terminy układ stacjonarny i układ niestacjonarny są często zastępowane odpowiednio przez układ autonomiczny i nieautonomiczny. Liniowe układy stacjonarne (ang. **Linear Time-Invariant** – LTI) są autonomiczne, natomiast liniowe układy niestacjonarne (ang. **Linear Time-Varying** – LTV) są nieautonomiczne.

W teorii systemów ważne jest **pojęcie stabilności**. Jest ono definiowane na wiele sposobów. Jedną z definicji jest **stabilność w sensie Lapunowa**. Zgodnie z nią, jeśli układ znajdujący się w punkcie równowagi zostanie z niego wypchnięty przez działanie zewnętrzne, a po upływie pewnego czasu znowu znajdzie się w początkowym stanie, to mówimy, że jest stabilny; jeśli natomiast nie powraca do stanu początkowego mówimy że jest niestabilny. Inne podejście tzw. **stabilność BIBO** wprowadza pojęcie stabilności ze względu na wymuszenie. Jeśli

dowolny ograniczony sygnał wejściowy $x(t)$ (o ograniczonej energii lub mocy) powoduje powstanie ograniczonego sygnału wyjściowego $y(t)$, czyli

$$\sup|x(t)| < \infty$$

co powoduje

$$\sup|y(t)| < \infty$$

to system jest stabilny w sensie BIBO.

Ważną własnością systemu jest jego **odwracalność**, rozumiana jako zdolność układu do przypisywania jednoznacznej odpowiedzi do każdego różniącego się wymuszenia. Innymi słowy, system jest odwracalny, jeśli wymuszenie może być jednoznacznie określone na podstawie odpowiedzi. Przykładem systemu, który nie spełnia warunku odwracalności jest układ realizujący funkcję modułu $y(t) = |x(t)|$, gdyż dwu wartościom różniącym się znakiem przypisuje tę samą odpowiedź.

Z pojęciem odwracalności wiąże się ściśle **inwersja systemu**. System S_1 jest inwersyjny w stosunku do innego systemu S_2 , jeśli w ich połączeniu kaskadowym następuje pełne odtworzenie sygnału wejściowego $y(t) = S_2(S_1(x(t))) = x(t)$.

Ważnym pojęciem w teorii systemów dynamicznych jest **sterowalność i obserwowalność** systemu. Liniowy układ sterowania jest sterowalny, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x(0)$ możemy zastosować takie sterowanie $u(t)$, które w skończonym czasie t spowoduje sprowadzenie sygnału wyjściowego do zadanego stanu, np. $x(t) = 0$. Układ jest obserwowalny, jeżeli przy dowolnym sterowaniu można określić wartości wszystkich zmiennych stanu w chwili t_0 na podstawie znajomości sterowania $u(t_0, t)$ i odpowiedzi $y(t_0, t)$. Innymi słowy, czy czy na podstawie odczytu sygnału sterującego oraz odczytu sygnału wyjściowego możliwe jest określenie wewnętrznego stanu obiektu.

Systemy dyskretne są dyskretnym odpowiednikiem systemów ciągłych. Układ dyskretny przetwarza wejściowy sygnał dyskretny $x(n)$ w sygnał wyjściowy również dyskretny, który oznaczymy jako $y(n) = y(nT_s)$, gdzie n oznacza numer kolejnej próbki (rys. 1.1). Wymienić można wiele pojęć charakteryzujących taki system.

Jednym z podstawowych jest rozróżnienie między **systemem z pamięcią i bez pamięci**. System jest z pamięcią, jeśli jego odpowiedź $y(n_0)$ zależy od innych wartości wymuszeń niż

$x(n_0)$. Tego typu system nazywany jest również systemem dynamicznym. Jeśli ta odpowiedź zależy jedynie od $x(n_0)$, wówczas system jest nazywany systemem bez pamięci. Przykładem systemu dynamicznego jest układ realizujący operację całkowania numerycznego Eulera, w którym $y(n) = y(n-1) + T_s x(n-1)$. Przykładem systemu bez pamięci jest układ realizujący operację wzmocnienia, dla którego $y(n) = Ax(n)$.

System jest **przyczynowy (causal)** jeśli jego sygnał wyjściowy dla dowolnej chwili zależy jedynie od wymuszenia w danej chwili i od wymuszeń wcześniejszych, a nie zależy od wymuszeń, które zdarzą się w przyszłości. Przykładem systemu przyczynowego jest układ realizujący operację $y(n) = x(n) + 0,5x(n-1) - 1,2x(n-2)$. Nie jest systemem przyczynowym układ przetwarzania opisany zależnością $y(n) = x(n-1) + 0,5x(n) - 1,2x(n+1)$.

Innym pojęciem ważnym dla systemów dyskretnych jest stacjonarność traktowana w przypadku systemów dyskretnych jako **niezmienniczość względem przesunięcia czasowego**. System dyskretny jest niezmienniczy względem przesunięcia czasowego, jeśli przesunięcie w czasie próbek sygnału wejściowego powoduje identyczne przesunięcie próbek sygnału wyjściowego. Oznacza to, że jeśli pobudzeniu $x(n)$ odpowiada odpowiedź układu $y(n)$ to przy pobudzeniu $x(n-n_0)$ odpowiedź układu jest równa $y(n-n_0)$.

System **dyskretny jest liniowy**, jeśli spełnia warunek addytywności i homogeniczności. Warunek addytywności oznacza, że jeśli wartościom sygnału wejściowego $x_1(n)$ odpowiada sygnał $y_1(n)$, to sygnałowi sumacyjnemu $x_1(n) + x_2(n)$ odpowiada suma odpowiednich sygnałów $y_1(n) + y_2(n)$, co zapiszemy w postaci

$$x_1(n) \rightarrow y_1(n) \text{ i } x_2(n) \rightarrow y_2(n) \text{ to } x_1(n) + x_2(n) \rightarrow y_1(n) + y_2(n) \quad (1.2)$$

Warunek homogeniczności oznacza, że jeśli

$$x_1(n) \rightarrow y(n) \text{ to } ax(n) \rightarrow ay(n) \quad (1.3)$$

Oba warunki muszą być spełnione dla dowolnej chwili. Układ liniowy spełnia zasadę superpozycji, co oznacza, że spełniony jest warunek

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \rightarrow a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \quad (1.4)$$

Układ liniowy niezmienniczy w czasie nazywany jest w skrócie LTI (ang. **Linear Time Invariant**).

2. OPIS STANOWY UKŁADÓW DYNAMICZNYCH (State space description of dynamic systems)

2.1 Pojęcia wstępne

Budując model układu dynamicznego, mamy do czynienia z wielkościami wejściowymi i wyjściowymi, narzuconymi przez układ fizyczny i wymagania stawiane modelowi. Pozostaje przyporządkowanie im odpowiednich zmiennych wewnętrznych układu opisanych w dziedzinie czasu (tak zwanych *zmiennych stanu*) reprezentujących stan procesu. Wybór zmiennych stanu, powinien być dokonany w trakcie definiowania modelu matematycznego danego procesu. Wybór ten musi zapewnić określoną na wstępie ogólną postać modelu, jak również jednoznaczny i pełny opis zjawisk fizycznych procesu, istotnych z punktu widzenia modelowania.

Zmienne stanu jako funkcje czasu opisują przebieg zjawisk fizycznych zachodzących zwykle w sposób ciągły. Stąd najczęściej używaną postacią tych funkcji jest funkcja ciągła. *Zbiór zmiennych stanu jest najmniejszym zbiorem zmiennych, którego znajomość w określonej chwili t_0 pozwala, przy wykorzystaniu przyszłych w stosunku do t_0 przebiegów wymuszeń zewnętrznych, przewidzieć w sposób jednoznaczny przyszłe zachowanie się zmiennych stanu i wielkości wyjściowych układu.*

Istnieje pewna dowolność wyboru zmiennych stanu, gdyż można dobrać wiele różnych zbiorów zmiennych spełniających warunki reprezentowania dynamiki procesu. Warunki te wymagają, aby na podstawie stanu układu w chwili t_1 i znajomości przebiegu wymuszeń dla $t > t_1$ można było wyznaczyć przebieg zmiennych stanu dla $t > t_1$. Informacja o przeszłych wartościach zmiennych stanu dla $t < t_1$ nie jest więc do tego potrzebna. Ponadto stan w chwili t_1 nie powinien zależeć od przyszłych przebiegów zmiennych wejściowych (układ przyczynowy). Definiując równania układu, można wyróżnić równanie stanu (zwykle w postaci wektorowej) oraz równanie wyjściowe (również w postaci wektorowej).

Równanie stanu reprezentuje istotne zjawiska dynamiczne zachodzące w opisywanym procesie pod wpływem wymuszeń zewnętrznych i nagromadzonej w układzie energii, wyrażając przyczynowy charakter tych zjawisk. Równanie to uzależnia stan układu w dowolnej chwili czasowej $t_1 > t_0$ od stanu układu w chwili t_0 , wektora wymuszeń zewnętrznych $\mathbf{u}(t)$ i zmian parametrów układu w czasie $t \in [t_0, t_1]$. Przy oznaczeniu \mathbf{x} dla

wektora zmiennych stanu jego ogólna postać czasowa rozwiązania może być przedstawiona w postaci zależności

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t] \quad (2.1)$$

Zmienna t występująca samodzielnie w zależności (2.1) reprezentuje potencjalne zmiany wartości parametrów układu w czasie (proces niestacjonarny). Postać (2.1) uzyskuje się zwykle w wyniku rozwiązania układu równań różniczkowych, definiowanych dla każdego procesu. Liczba zmiennych stanu tworzących wektor $\mathbf{x}(t)$ nazywana jest wymiarem stanu układu lub jego *rzędem*.

Równanie wyjściowe opisane wektorem \mathbf{y} jest uzależnione od wyboru zmiennych stanu i istniejących wymuszeń w układzie. Określa ono związek zmiennych wyjściowych ze zmiennymi stanu i wielkościami wejściowymi. Zakładając istnienie jawnej postaci równania wyjściowego

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (2.2)$$

w którym funkcja wektorowa \mathbf{g} stanowi jednoznaczne przyporządkowanie wielkościom $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ oraz czasu t wektora odpowiedzi $\mathbf{y}(t)$. Dynamika układu, czyli zmiany wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ w czasie, można przedstawić jako zmiany położenia wektora $\mathbf{x}(t)$ w przestrzeni n -wymiarowej, gdzie n jest wymiarem wektora stanu. Przestrzeń taką nazywa się **przestrzenią stanu**. Każdy punkt przestrzeni reprezentuje określony stan dynamiczny układu. Zmiany położenia wektora $\mathbf{x}(t)$ w przestrzeni stanu wyznaczają krzywą zwaną **trajektorią fazową**.

2.2 Opis dynamiczny układów nieliniowych ciągłych

Najbardziej rozpowszechnionym, choć nie zawsze istniejącym opisem układów dynamicznych ciągłych w dziedzinie czasu jest postać normalna w postaci zbioru równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_N, t) \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_N, t) \\ &\dots\dots\dots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_N, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

zapisanych w sposób zwarty jako wektorowe równanie stanu

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.4)$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$. Uzupełniając go o opis wektorowy zmiennych wyjściowych tworzących wektor $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.5)$$

otrzymuje się kompletny opis normalny modelu układu dynamicznego w postaci pary równań

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

definiujących dynamikę procesu. Zapis równań w postaci jawnego uzależnienia od czasu t wskazuje na zmienność parametrów procesu z czasem, czyli proces niestacjonarny. W przypadku stacjonarności zmienna t nie występuje w opisie.

Należy przy tym zauważyć, że w odróżnieniu od układów liniowych postać normalna równań stanu dla obwodu nieliniowego może nie istnieć. Przyczyną tego może być niemonotoniczność charakterystyki określonego elementu nieliniowego i wynikający z tego brak funkcji odwrotnej odpowiadającej danej charakterystyce. Wybór zmiennych stanu może mieć również istotny wpływ na istnienie postaci normalnej opisu lub jej brak. Zwykle w systemach elektrycznych przyjmuje się za zmienną stanu napięcie na kondensatorze uzależnionym napięciowo i prąd dla cewki uzależnionej prądowo. W przypadku kondensatora uzależnionego ładunkowo zmienną stanu powinien być ładunek, a dla cewki uzależnionej od strumienia za zmienną stanu przyjmuje się strumień. W przypadku charakterystyk monotonicznych mających zarówno opis prosty typu $y=f(x)$ jak i odwrotny $x=g(y)$ wybór zmiennych stanu powinien preferować ładunek w przypadku kondensatora i strumień w przypadku cewki (zmniejsza się w ten sposób wrażliwość opisu na błędy zaokrągleń).

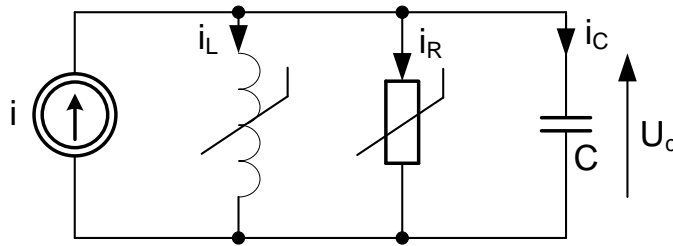
Przykład 2.1

Dla ilustracji powyższych rozważań rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 2.1, zawierający nieliniowy rezystor i cewkę oraz liniowy kondensator. Rozpatrzmy dwa warianty opisu elementów nieliniowych. W wariacie pierwszym założymy

$$i_R = u_R^3 - 3u_R$$

$$i_L = \psi^3 - 3\psi$$

W wariacie drugim charakterystyka rezystora dana jest w postaci zależności napięcia od prądu $u_R = 1 - i_R^2 + i_R^3$ przy niezmiennym opisie cewki nieliniowej.



Rys. 2.1. Struktura obwodu poddanego opisowi równaniami stanu

Z równań Kirchhoffa opisujących obwód otrzymuje się

$$C \frac{du_C}{dt} = (i - i_R - i_L)$$

$$u_C = \frac{d\psi}{dt}$$

W przypadku wariantu pierwszego wektor stanu tworzą napięcie na kondensatorze i strumień cewki $\mathbf{x} = [u_C \ \psi]^T$, przy czym $u_R = u_C$. W takim przypadku otrzymuje się

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} (i - u_C^3 + 3u_C - \psi^3 + 3\psi)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = u_C$$

W wariacie drugim ze względu na niemonotoniczność charakterystyki rezystora nieliniowego nie można wyrazić prądu i_R jako funkcji napięcia u_R , stąd taki opis stanu nie istnieje.

Przedstawione wyżej równania stanowią mogą podstawę konstrukcji schematu blokowego budowanego z myślą o zastosowaniu konkretnego symulatora układów dynamicznych (np. Simulink, SPICE, itp.). Symulator taki dokonuje operacji całkowania równań, generując na wyjściu postać czasową zmiennych wyjściowych oraz zmiennych stanu.

2.3 Linearyzacja równań nieliniowych stanu

Analiza czasowa procesu dynamicznego polega na rozwiązaniu równań stanu w dziedzinie czasu. W przypadku układów nieliniowych jest to zwykle proces trudny do przeprowadzenia ze względu na złożone zależności funkcjonalne równań (2.4) i (2.5). Z tego powodu w analizie jakościowej przeprowadza się często linearyzację równań w rozważanym punkcie pracy układu,

zastępując wielkości rzeczywiste ich przyrostami w stosunku do wartości w punkcie pracy. Przy założeniu

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.7}$$

gdzie wielkości z falką oznaczają ustalony punkt pracy układu, tzn. $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ (zakładamy model stacjonarny procesu). Biorąc pod uwagę, że $d\mathbf{x}/dt = d\Delta\mathbf{x}/dt$ i uwzględniając rozwinięcie

wektorów stanu \mathbf{x} i odpowiedzi \mathbf{y} w szereg Taylora pierwszego rzędu $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u}$

oraz $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u}$ otrzymuje się opis zlinearyzowany procesu w postaci

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.8}$$

w którym $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ i $\mathbf{D}(t)$ są macierzami Jacobiego określanymi w punkcie pracy odpowiadającym ustalonym aktualnie wartościom zmiennych stanu. Oznacza to, że macierze te opisane są wzorami

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\tag{2.9}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_N} \end{bmatrix}\tag{2.10}$$

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}(t) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_N} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ustalane wartości elementów macierzy stanu obowiązują w krótkim przedziale czasu Δt związanym z aktualnym punktem pracy układu. Biorąc pod uwagę, że w każdym punkcie pracy wartości elementów macierzy są różne, model zlinearyzowany może być uważany za układ zmienny w czasie. Stąd w oznaczeniu macierzy stanu pojawiła się zależność od czasu. Warunki początkowe równania przyrostowego stanu (2.8) reprezentują odchylenie wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ od ustalonego punktu pracy w chwili t .

Liniowa postać modelu uzyskana w wyniku linearyzacji równań nieliniowych upraszcza w sposób istotny analizę układu i umożliwia zastosowanie wielu prostszych metod rozwiązania stosowanych w przypadku równań liniowych. Należy przy tym pamiętać, że wraz ze zmianą rozwiązania zmieniają się wartości elementów macierzy **A**, **B**, **C** i **D**, które powinny być aktualizowane w każdym kroku.

Przykład linearyzacji

1. Dokonać linearyzacji równań w płacie równowagi

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + u_2 - u_1$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = -3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2 + u_1$$

Równania wyjściowe

$$y_1 = 4 \cos x_1 + 2x_1^2 + u_1$$

$$y_2 = 3x_1x_2^2 + u_1 - u_2$$

Rozwiązanie

Macierze stanu

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

Pkty równowagi

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \rightarrow 2x_1 + u_1 - u_2 = 4 \rightarrow x_1 = 2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \rightarrow 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2 + u_1 = 12 + 2x_2 + 2x_2 + 1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-13}{4} = -3,25$$

Stąd

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \\ \hline 6x_1 + x_2 & x_1 + 2 & \\ \hline \end{array} \right]_{\substack{x_1=2 \\ x_2=-3,25}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8,75 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} -4 \sin x_1 + 4x_1 & 0 & \\ \hline 3x_2^2 & 6x_1x_2 & \\ \hline \end{array} \right]_{\substack{x_1=2 \\ x_2=-3,25}} = \begin{bmatrix} 4,36 & 0 \\ 10,56 & -39 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Równania linearyzowane stanu

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8,75 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,36 & 0 \\ 10,56 & -39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie stabilności lokalnej płaty równowagi

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -8,75 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) < \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix}$$

Pkt równowagi niestabilny.

2.4. Opis stanowy układów liniowych

Układ liniowy ciągły o stałych parametrach (inwariantny) opisuje się równaniem stanu i równaniem wyjściowym analogicznie do zlinearyzowanych równań stanu (2.8), w których zamiast przyrostów występują wprost same zmienne. Rozważać będziemy układy stacjonarne, w których parametry nie zależą od czasu. Stąd opis normalny stanu ogólny liniowego procesu stacjonarnego przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Jeśli, podobnie jak poprzednio, przyjmiemy, że wektor \mathbf{x} ma wymiar n , wektor \mathbf{y} – wymiar m , a wektor \mathbf{u} – wymiar N , to poszczególne macierze mają następujące wymiary: $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times N}$, $\mathbf{C} \in R^{m \times n}$, $\mathbf{D} \in R^{m \times N}$.

Macierze \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} stanowią jedynie czynnik transformujący i skalujący wielkości wyjściowe, natomiast zasadnicze własności jakościowe układu zawarte są w macierzy stanu \mathbf{A} . **Wartości własne** s_i (często oznaczane również jako λ_i) tej macierzy, stanowiące jednocześnie bieguny systemu, są zbiorem pierwiastków równania charakterystycznego $\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0$. Mają one decydujący wpływ na zachowanie się układu w czasie, w tym stabilność układu i charakter odpowiedzi czasowej układu w stanie przejściowym powstałym na skutek przyłożenia wymuszenia zewnętrznego lub występowania niezerowych warunków początkowych. Każda wartość własna jest stowarzyszona z odpowiadającym jej wektorem własnym \mathbf{v} , przy czym wektor własny \mathbf{v}_i stowarzyszony wartością własną s_i spełnia równanie $s_i \mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i$.

Stabilność systemu dynamicznego wymaga, aby przy zaniku wymuszenia jego odpowiedź w stanie ustalonym w dowolnym przedziale czasu (od zera do nieskończoności) była ograniczona co do amplitudy (*stabilność w sensie zwykłym*) lub zerowa (*stabilność w sensie asymptotycznym*). Jest to tak zwana stabilność typu BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Rozwiązanie równania liniowego stanu można zapisać w postaci zależności całkowej

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)\tag{3.26}$$

Przy braku wymuszenia odpowiedź czasowa układu zależy jedynie od warunków początkowych $\mathbf{x}(t_0)$. Stabilność w sensie ograniczonej odpowiedzi jest uzależniona od wartości rozwiązania

odpowiadającej drugiemu składnikowi wzoru (3.26), a więc od wartości funkcji $e^{A(t-t_0)}$. Jest to tak zwana odpowiedź przejściowa $\mathbf{x}_p(t)$, którą w ogólności można zapisać w postaci uzależnionej od wartości własnych macierzy \mathbf{A} . W przypadku wartości własnych pojedynczych postać odpowiedzi przejściowej jest następująca

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i e^{s_i t} \quad (3.27)$$

W przypadku wartości własnych wielokrotnych odpowiedź przejściowa może być zapisana w ogólnej postaci

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^{n_1} \mathbf{F}_k t e^{s_k t} + \sum_{r=1}^{n_2} \mathbf{G}_r t^2 e^{s_r t} + \dots \quad (3.28)$$

Zauważmy, że niezależnie od krotności wartości własnych poszczególne składniki wektora stanu będą ograniczone co do amplitudy, jeśli wszystkie wartości własne systemu są położone w lewej półpłaszczyźnie, tzn. $\text{Re}(s_i) < 0$.

Przy niezerowych wartościach części rzeczywistej wartości własnych położonych w lewej półpłaszczyźnie odpowiedź swobodna (przejściowa) układu dla narastających wartości czasu będzie zanikać do 0 (układ stabilny asymptotycznie). Przy położeniu biegunów na osi urojonej ($\text{Re}(s_i) = 0$) układ może być stabilny (choć nie asymptotycznie), jeśli są to wartości własne pojedyncze. Układ staje się niestabilny w przypadku wartości własnych położonych na osi urojonej co najmniej podwójnych wartościach. Wynika to ze wzoru (3.28), w którym dla $s = j\omega$ $|e^{st}| \leq 1$ niezależnie od czasu t i wartości drugiego i kolejnych składników wzoru (3.28) dąży do nieskończoności dla wzrastających wartości czasu t .

3. Nieliniowe układy autonomiczne

3.1 Podstawowe pojęcia

Układem autonomicznym nazywamy układ stacjonarny, w którym nie występują wymuszenia zewnętrzne [21]. W układzie takim zmiany wartości sygnałów zachodzą na skutek niezerowych warunków początkowych. Jego opis stanowy nie zawiera jawnej zależności od czasu i może być zapisany w postaci

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

w której $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest funkcją wektorową uzależnioną jedynie od wektora zmiennych stanu. W szczególności dla uproszczenia rozpatrzmy wektorowe równanie stanu drugiego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Płaszczyznę (x_1, x_2) nazywamy **płaszczyzną stanu**. Jeśli dodatkowo między zmiennymi x_1 i x_2 zachodzi zależność $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ to płaszczyzna stanu jest nazywana **płaszczyzną fazową**. Równania (3.19) można przedstawić w postaci jednego **równania fazowego**

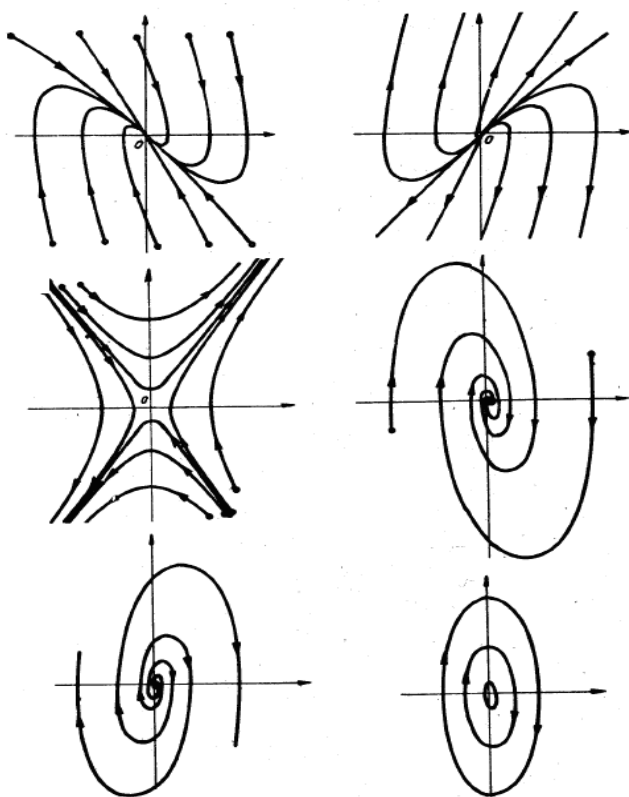
$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} \quad (3.20)$$

którego rozwiązanie w czasie tworzy na płaszczyźnie (x_1, x_2) krzywe zwane krzywymi całkowymi. W przypadku płaszczyzny fazowej nazywamy je **trajektoriami fazowymi**. Każdej chwili czasowej t odpowiada punkt na płaszczyźnie fazowej, zwany punktem odwzorowującym. **Punkt równowagi** systemu odpowiada punktowi w którym $d\mathbf{x}/dt=0$. W przypadku układu drugiego rzędu punkt równowagi spełnia dwa równania skalarne $dx_1/dt=0$ oraz $dx_2/dt=0$. Jest to tak zwany **punkt osobliwy** systemu.

W zależności od przebiegu trajektorii fazowej w pobliżu punktu równowagi możemy wyróżnić różne rodzaje punktów osobliwych. Należą do nich: *węzeł*, *siodło*, *ognisko* oraz *środek*. Przebiegi trajektorii odpowiadających tym punktom przedstawione są na rys. 3.2 [21]. W przypadku punktów niestabilnych przebiegi te mają charakter narastający (strzałki zmian

skierowane są „od” punktu osobliwego, wskazując na odpychający charakter punktu osobliwego).

Trajektorie fazowe mogą tworzyć struktury zamknięte, zwane **cyklami granicznymi**. W przypadku układu drugiego rzędu na cykl graniczny składają się przebiegi czasowe zmiennej x_1 i x_2 stanowiące drgania niegasnące w czasie przedstawione na płaszczyźnie (x_1, x_2) . W przypadku drgań sinusoidalnych cykl graniczny jest w kształcie elipsy lub koła. Na podstawie przebiegu czasowego drgań można zbudować trajektorię fazową (metoda izoklin, funkcji delta, itp.). Z drugiej strony znając trajektorię fazową można odtworzyć kształt sygnałów x_1 oraz x_2 w czasie.



Rys. 3.2. Interpretacja graficzna punktów osobliwych: wiersz górny: węzeł stabilny i niestabilny, wiersz środkowy: siodło i ognisko stabilne, wiersz dolny: ognisko niestabilne, środek

Węzeł stabilny powstaje w układzie dynamicznym, gdy wszystkie wartości własne systemu leżą w lewej półpłaszczyźnie. Węzeł niestabilny powstaje gdy wartości własne położone są w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Siodło odpowiada systemowi, w którym wartości własne

są rzeczywiste, ale występują pary o przeciwnych znakach. Trajektorie w postaci środka występuje gdy wartości własne położone są na osi urojonej.

3.2 Stabilność nieliniowych układów dynamicznych

3.2.1 Definicje stabilności

Pojęcie stabilności układów dynamicznych może być definiowane na wiele sposobów [6,21,32]. W przypadku układów nieautonomicznych stosuje się pojęcie stabilności w sensie **ograniczone wejście – ograniczone wyjście**, zwane również często BIBO (ang. Bounded Input – Bounded Output). Obwód nieliniowy jest **stabilny w sensie BIBO** gdy dowolny ograniczony sygnał wejściowy $u(t)$ wymusza powstanie również ograniczonego sygnału wyjściowego $y(t)$ dla $t \rightarrow \infty$. W przypadku wielu wejść i wielu wyjść relacje ograniczoności odnoszą się do każdego z nich.

Drugim rodzajem stabilności, który poddany zostanie rozważaniom jest **stabilność w sensie Lapunowa** [6] odnosząca się do obwodów autonomicznych (układ stacjonarny przy braku wymuszenia zewnętrznego). Obwód autonomiczny opisany jest równaniem stanu o postaci (2.13). Punkty równowagi stanowią rozwiązania tego równania stanu w postaci wektora stanu $\mathbf{x}(t)$. W przypadku obwodów nieliniowych można wyróżnić dwa rodzaje stabilności punktów równowagi: lokalną i globalną.

Stabilność lokalna w punkcie równowagi oznacza, że obwód jest stabilny dla warunków początkowych z dostatecznie małego otoczenia tego punktu. Oznacza to, że dostatecznie małe zaburzenie tego punktu dla układu stabilnego powoduje samoczynny powrót stanu układu do tego (a nie innego) punktu równowagi.

Stabilność globalna w punkcie równowagi oznacza, że obwód jest stabilny dla warunków początkowych położonych w dowolnym punkcie obszaru. Oznacza to, że dowolnie duże zaburzenie tego punktu powoduje samoczynny powrót stanu układu do tego samego punktu równowagi.

Wyróżniamy również pojęcie stabilności asymptotycznej. **Stabilność asymptotyczna** układu oznacza, że odpowiedź układu autonomicznego dla $t \rightarrow \infty$ zmierza do punktu równowagi

położonego w początku układu współrzędnych, to znaczy $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ (z założenia układ jest autonomiczny, co oznacza brak wymuszenia zewnętrznego).

3.2.2 Kryteria stabilności Lapunowa

Stabilność lokalna układu może być określona przy zastosowaniu **pierwszej zasady Lapunowa**. Zgodnie z tą zasadą układ nieliniowy autonomiczny opisany równaniem $\mathbf{dx}/dt=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest stabilny asymptotycznie w punkcie równowagi $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ w sensie lokalnym (przy warunku początkowym z dostatecznie małego otoczenia tego punktu) gdy liniowe przybliżenie równania stanu $\mathbf{dx}/dt=\mathbf{Ax}$ jest stabilne asymptotycznie, to znaczy, że wszystkie wartości własne s_i macierzy \mathbf{A} leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, czyli $\text{Re}(s_i)<0$ dla $i=1, 2, \dots, n$ (n – liczba zmiennych stanu). Przy położeniu choć jednej wartości własnej po prawej stronie osi urojonej ($\text{Re}(s_i)>0$) układ nieliniowy jest niestabilny. W przypadku położenia którejkolwiek wartości własnej na osi urojonej ($\text{Re}(s_i)=0$) nie można na podstawie przybliżenia liniowego wnioskować o stabilności lokalnej obwodu nieliniowego.

Należy przy tym zaznaczyć, że opracowano szereg metod określania stabilności równania liniowego stanu $\mathbf{dx}/dt=\mathbf{Ax}$ (przybliżenia liniowego układu) bez potrzeby wyznaczania wartości własnych. Należą do nich między innymi: kryterium Hurwitza, Routha, itp.

Badanie stabilności globalnej układu jest znacznie bardziej złożone. Stosuje się do niej **druga zasada Lapunowa**. Zgodnie z tą zasadą układ nieliniowy autonomiczny opisany równaniem stanu $\mathbf{dx}/dt=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest stabilny asymptotycznie w punkcie równowagi $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ w sensie globalnym, jeśli można zdefiniować taką funkcję $V(\mathbf{x})$ dodatnio określoną¹, że [6]

1. przyjmuje ona wartość $V(\mathbf{x})$ dążącą do nieskończoności przy $x \rightarrow \infty$
2. pochodna względem czasu $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ jest funkcją ujemnie określoną w całym obszarze zmienności wektora \mathbf{x} .

¹ Funkcja jest dodatnio określona, jeśli w całym obszarze określoności D przyjmuje wartość dodatnią, a zero tylko w początku układu współrzędnych.

3. Jeśli pochodna $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ jest niedodatnio określona (wartości ujemne lub zerowe) to taki układ jest stabilny globalnie, ale nie asymptotycznie.

Funkcję $V(\mathbf{x})$ przyjmuje się najczęściej jako formę kwadratową zmiennych x_i , to znaczy

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \quad (3.16)$$

Inna również często używana forma funkcji $V(\mathbf{x})$ ma postać

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \int_0^l g(\eta) d\eta \quad (3.17)$$

w której $g(\eta)$ jest funkcją definiowaną przez użytkownika. Istnienie funkcji $V(\mathbf{x})$ jest dostatecznym warunkiem występowania globalnej stabilności asymptotycznej dla danego nieliniowego układu autonomicznego o określonym punkcie równowagi. Teorię globalnej stabilności zilustrujemy dwoma przykładami układów nieliniowych.

Przykład 2.2

Jako przykład pierwszy rozpatrzmy układ nieliniowy opisany **równaniem Duffinga** o postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + x + b \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$$

W pierwszej kolejności należy go przekształcić do postaci stanowej. Przyjmując $x_1=x$ oraz $x_2=dx_1/dt$ otrzymuje się

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - x_1 - bx_2^3$$

Stąd równanie Duffinga można zapisać w następującej postaci stanowej

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_2 - x_1 - bx_2^3 \end{aligned}$$

Jako funkcję Lapunowa przyjmijmy

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Łatwo sprawdzić, że jest to funkcja dodatnio określona o wartości $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ przy $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Aby sprawdzić warunek drugi należy obliczyć pochodną $dV(\mathbf{x})/dt$

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{dV(\mathbf{x})}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV(\mathbf{x})}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 + x_2 (-ax_2 - x_1 - bx_2^3)$$

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -(ax_2^2 + bx_2^4)$$

Z postaci funkcji $V(\mathbf{x})$ wynika, że układ opisany równaniem Duffinga jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli spełniony jest warunek

$$ax_2^2 + bx_2^4 > 0 \rightarrow x_2^2 > -\frac{a}{b}$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $a > 0$ i $b > 0$ wówczas warunek stabilności globalnej jest spełniony bez żadnych ograniczeń. Mówimy wówczas o **stabilności totalnej** układu.

Przykład 2.3

Jako drugi przykład rozpatrzmy dynamiczny układ nieliniowy pierwszego rzędu opisany równaniem

$$\frac{dx}{dt} = -ax - bg(x)$$

przy założeniu, że współczynniki a , b spełniają warunek $a > 0$, $b > 0$. Należy wyznaczyć klasę charakterystyk $g(x)$ dla których powyższy układ dynamiczny jest stabilny asymptotycznie w ograniczonym obszarze D . W badaniach przyjmiemy jako funkcję Lapunowa zmodyfikowaną postać formy kwadratowej (2.17), w której funkcja $g(\eta)$ jest tej samej postaci co $g(x)$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x g(x)dx$$

Warunek pierwszy jest automatycznie spełniony, gdyż przy $x \rightarrow \infty$ mamy $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$. Z obliczenia pochodnej $V(\mathbf{x})$ względem czasu otrzymuje się

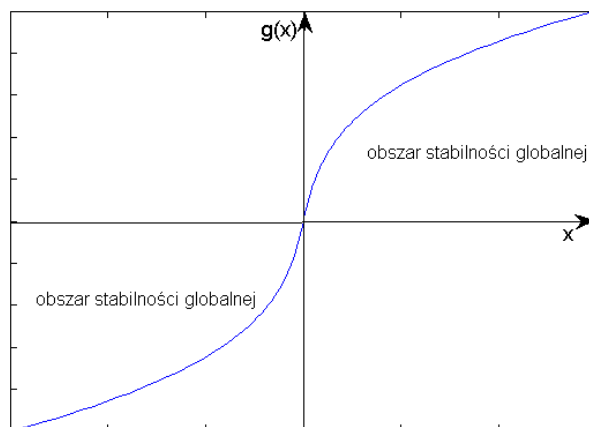
$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{dV(\mathbf{x})}{dx} \frac{dx}{dt} = [x + g(x)][-ax - bg(x)]$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się ostatecznie

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{dV(\mathbf{x})}{dx} \frac{dx}{dt} = -[ax^2 + b(g(x))^2 + (a+b)xg(x)]$$

Pochodna $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ będzie ujemnie określona, jeśli wyrażenie w nawiasie kwadratowym będzie dodatnio określone. Dwa pierwsze człony powyższego równania występujące w nawiasie kwadratowym są zawsze dodatnio określone. Człon ostatni będzie również dodatnio określony

jeśli spełniony będzie warunek $xg(x) > 0$. Warunek ten jest automatycznie spełniony, jeśli funkcja $g(x)$ zawierać się będzie w pierwszej lub trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, jak to pokazano na rys. 3.1



Rys. 3.1. Ilustracja warunku stabilności globalnej układu

3.3. Obwody autonomiczne pierwszego rzędu

3.3.1. Punkty równowagi

Szczególnie interesujące i łatwe w badaniu są obwody autonomiczne pierwszego rzędu ze względu na to, że pochodna zmiennej stanu jest jednocześnie funkcją nieliniową $f(x)$. Równania takie znajdują szerokie zastosowania w praktyce inżynierskiej przy projektowaniu generatorów relaksacyjnych [21]. Rozważmy nieliniowy układ autonomiczny opisany równaniem stanu o postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3.21}$$

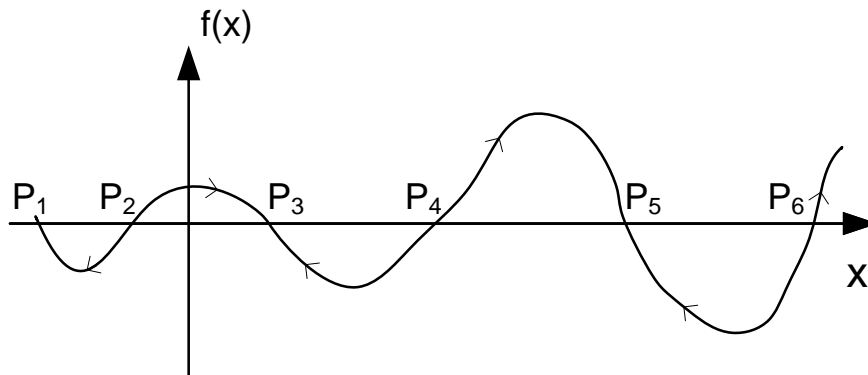
W takim przypadku płaszczyzna fazowa $(x, dx/dt)$ jest równoważna charakterystyce nieliniowej układu $(x, f(x))$, a trajektorie fazowe stanowią pewne odcinki charakterystyki $f(x)$. Stany równowagi odpowiadające równaniu różniczkowemu (3.9) określone są więc równaniem

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow f(x) = 0 \tag{3.22}$$

Graficznie odpowiada to przecięciu krzywej $f(x)$ z osią x . Każdy punkt przecięcia wyznacza punkt równowagi układu, który może być stabilny lub niestabilny. Stabilność każdego punktu określa się na podstawie nachylenia krzywej w tym punkcie korzystając z następującego twierdzenia.

Przyjmijmy opis stanowy układu autonomicznego w postaci $dx/dt=f(x)$. Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła o punktach równowagi $P_j(x=x_j)$. Punkt równowagi P_j jest punktem stabilnym, jeśli istnieje otoczenie punktu $x=x_j$, w którym $f(x)$ jest funkcją wyłącznie malejącą. Jeśli takiego otoczenia nie ma to punkt P_j jest niestabilny.

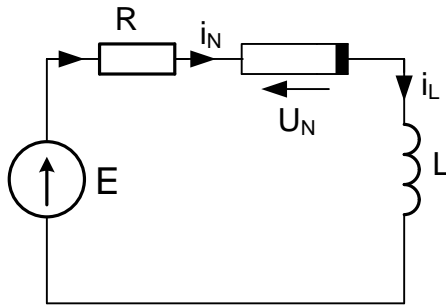
Na rys. 3.3 zilustrowano interpretację punktów równowagi dla przyjętej krzywej $f(x)$. Wyróżnić można 6 punktów równowagi: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 oraz P_6 . Na podstawie powyższego twierdzenia o stabilności można wnioskować, że stabilnymi punktami równowagi są: P_1, P_3 , oraz P_5 . Pozostałe punkty (P_2, P_4, P_6) nie spełniają warunków stabilności. Oznacza to, że umieszczenie warunków początkowych układu w bliskim otoczeniu tych punktów nie spowoduje zakończenia procesu stanu nieustalonego w tych punktach. Punkty te działają „odpychająco”. Kierunek strzałek umieszczonych na krzywej wskazuje przewidywany kierunek zmian zmiennej $x(t)$ w czasie.



Rys. 3.3. Ilustracja punktów równowagi i ich stabilności

Przykład 3.4

Rozpatrzmy jako przykład obwód zawierający jeden rezystor liniowy, jeden rezystor nieliniowy oraz cewkę i źródło napięcia stałego E , przedstawiony na rys. 3.4. Rozważymy rezystancję nieliniową sterowaną prądem, określając powstałe punkty równowagi oraz ich stabilność.



Rys. 3.4. Nieliniowy obwód elektryczny do przykładu

Z równania Kirchhoffa opisującego obwód wobec $i_L = i_N$ wynika następująca zależność

$$E - Ri_L - u_n(i_L) - L \frac{di_L}{dt} = 0$$

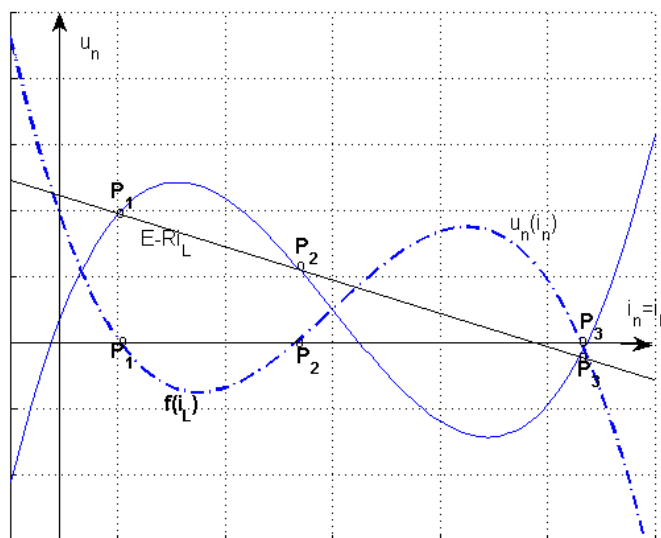
Stąd równanie stanu obwodu przyjmuje postać

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (E - Ri_L - u_n(i_L)) = f(i_L)$$

Punkty równowagi spełniające warunek $di_L/dt = f(i_L) = 0$ są wyznaczone równaniem

$$u_n(i_L) = E - Ri_L$$

i odpowiadają przecięciu prostej obciążenia $E - Ri_L$ z charakterystyką elementu nieliniowego $u_n(i_n)$, przy czym $i_n = i_L$. Można wyróżnić trzy takie punkty: P₁, P₂ oraz P₃, jak to pokazano na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Ilustracja punktów równowagi odpowiadających układowi z rys. 3.5

W punktach P_1 i P_3 krzywa $f(i_L)$ będąca różnicą prostej obciążenia i krzywej nieliniowej rezystora nieliniowego ma charakter malejący. Oznacza to, że punkty te są stabilne asymptotycznie. Punkt P_2 jest niestabilny, gdyż w jego otoczeniu charakter krzywej $f(i_L)$ jest rosnący.

3.3.2. Rozwiązanie równania stanu pierwszego rzędu w dziedzinie czasu

Rozwiązanie równania stanu (3.9) pierwszego rzędu jest stosunkowo łatwe, zwłaszcza jeśli funkcja $f(x)$ jest aproksymowana odcinkowo-liniowo [21]. Pierwszym krokiem jest rozdzielenie zmiennych

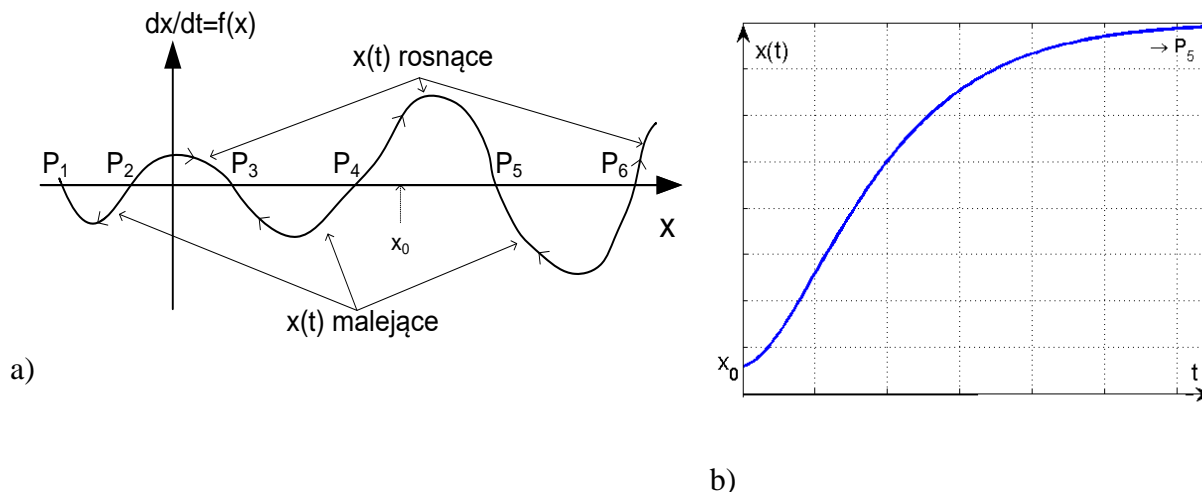
$$dt = \frac{1}{f(x)} dx \quad (3.23)$$

Rozwiązanie w granicach od t_0 do t_j otrzymuje się całkując obustronnie powyższą zależność

$$t_j = t_0 + \int_{t_0}^{t_j} \frac{1}{f(x)} dx \quad (3.24)$$

Rozwiązanie w dowolnej chwili czasowej musi się mieścić między dwoma sąsiednimi punktami równowagi albo między punktem równowagi a punktem $x = \infty$ lub $x = -\infty$. Biorąc pod uwagę charakter układu pierwszego rzędu funkcja $1/f(x)$ znajdująca się pod znakiem całki jest albo ujemna albo dodatnia, w zależności od warunków początkowych. Jeśli ta pochodna jest dodatnia

to $x(t)$ jest monotonicznie rosnąca, w przeciwnym przypadku monotonicznie malejąca względem czasu.

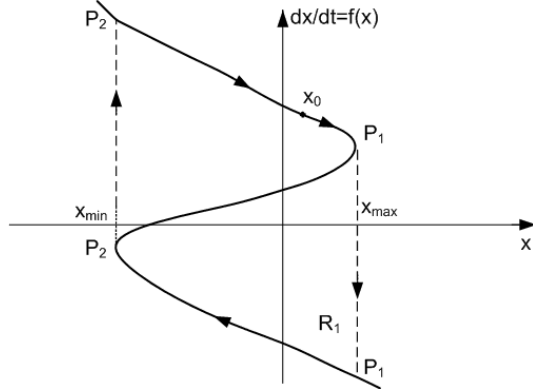


Rys. 3.6. Przykład rozwiązania czasowego w układzie pierwszego rzędu: a) postać krzywej $f(x)$ na płaszczyźnie stanu, b) rozwiązanie $x(t)$ przy założonym warunku początkowym x_0

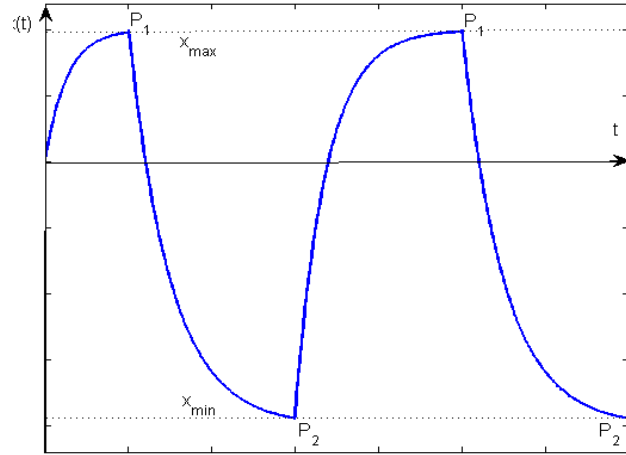
Rozwiązanie $x(t)$ jak również pochodna dx/dt zachowują charakter ciągły przy ciągłej (względem x) postaci funkcji $f(x)$. Przy założeniu warunku początkowego $x(0)=x_0$ jak to pokazano na rys. 3.7a rozwiązanie dąży do najbliższego stabilnego punktu równowagi (punkt P_5). Ilustrację takiego przypadku w postaci przebiegu rozwiązania $x(t)$ przedstawiono na rys. 3.7b. Przebieg czasowy $x(t)$ przy założonym warunku początkowym x_0 dąży asymptotycznie do punktu równowagi P_5 .

Zauważmy, że punkt niestabilny P_4 najbliższy założonemu warunkowi początkowemu x_0 działa odpychająco (wobec dodatniej wartości pochodnej wartości zmiennej $x(t)$ są rosnące), wyznaczając ruch w kierunku najbliższego punktu stabilnego P_5 .

Zasadniczo inne rozwiązanie otrzymuje się przy braku ciągłości funkcji $f(x)$. Przy braku stabilnych punktów równowagi rozwiązanie równania stanu pierwszego rzędu będzie oscylować wokół punktu niestabilnego wytwarzając drgania niegasnące w czasie. Ilustrację tego przypadku przedstawiono na rys. 3.7.



a)



b)

Rys. 3.7. Ilustracja zachowania się układu nieliniowego przy braku stabilnych punktów równowagi: a) postać krzywej $f(x)$ na płaszczyźnie stanu o jednym niestabilnym punkcie równowagi, b) rozwiązanie $x(t)$ przy założonym warunku początkowym x_0

Rys. 3.7a przedstawia funkcję $f(x)$ o jednym niestabilnym punkcie równowagi na płaszczyźnie stanu. Funkcja ta jest nieciągła względem zmiennej x . Po uzyskaniu przez $x(t)$ wartości maksymalnej x_{max} następuje przeskok na część charakterystyki o ujemnej wartości pochodnej. Oznacza to, że od tej chwili pochodna jest ujemna i sygnał $x(t)$ ma charakter malejący, aż do osiągnięcia wartości minimalnej x_{min} , przy której następuje ponownie przeskok na część charakterystyki o dodatnim nachyleniu. W efekcie tego generowane są ciągłe drgania niegasnące (zwane drganiami relaksacyjnymi) przedstawione na rys. 3.7b.

4. OPIS UKŁADÓW DYNAMICZNYCH LINIOWYCH W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI (Description of linear dynamic systems in frequency domain)

3.1 Transformacja Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a jest przekształceniem całkowym stosowanym jako podstawowy element w opisie sygnałów i układów liniowych w stanach dynamicznych. Z punktu widzenia sygnałów może być potraktowane jako uogólnienie transformacji Fouriera sygnałów analogowych (czasu ciągłego). W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawy teoretyczne tego przekształcenia i elementy aplikacyjne z tym związane.

Istota przekształcenia Laplace'a polega na tym, że funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t > 0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$. Funkcję $f(t)$ nazywamy oryginałem i oznaczamy małą literą. Funkcję $F(s)$ nazywamy transformatą funkcji $f(t)$ określoną w dziedzinie zmiennej zespolonej s i oznaczamy dużą literą. Zmienna s jest nazywana częstotliwością zespoloną, przy czym $s = \sigma + j\omega$, gdzie ω oznacza pulsację.

W elektrotechnice najczęściej używane jest jednostronne przekształcenie Laplace'a, określone parą równań:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3.2)$$

w których c jest stałą warunkującą położenie granic całkowania w obszarze zbieżności transformaty. Pierwsze z równań definiuje proste przekształcenie Laplace'a przyporządkowujące oryginałowi transformatę zmiennej zespolonej s , a drugie przekształcenie odwrotne dokonujące transformacji odwrotnej, czyli wyznaczające funkcję oryginału na podstawie $F(s)$. Zakładamy przy tym, że funkcja $f(t)$ jest funkcją czasu, zadaną dla $t > 0$ i równą 0 dla $t < 0$ oraz, że nie rośnie szybciej niż funkcja wykładnicza. Proste przekształcenie Laplace'a określone wzorem (3.1) dokonuje transformacji funkcji czasu $f(t)$ na funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s . Zauważmy, że przy założeniu $f(t)=0$ w zakresie czasu ujemnego transformacja Laplace'a jest uogólnieniem

transformacji Fouriera, zdefiniowanej wówczas wzorem $F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$. Przyjęcie w

definicji transformacji Laplace'a wartości zespolonej $s=j\omega$ czyni ją równą transformacji Fouriera. Zaletą transformacji Laplace'a jest jej ogólny charakter, pozwalający na zastosowanie dowolnej wartości zmiennej zespolonej $s = \sigma+j\omega$. Stwarza to możliwość zastosowania opisu operatorowego Laplace'a w odniesieniu zarówno do sygnałów jak i do systemów przetwarzających te sygnały.

Przekształcenie odwrotne określone wzorem (3.2) dokonuje transformacji funkcji zespolonej $F(s)$ na funkcję czasu $f(t)$. Wzór ten pełni jedynie rolę definicji i w praktyce nie używa się go do wyznaczania transformaty odwrotnej, wykorzystując w zamian własności transformat Laplace'a.

Obliczanie transformat dla większości funkcji, zwłaszcza bardziej złożonych, nie jest procesem łatwym i dlatego w praktyce inżynierskiej najczęściej posługujemy się tablicami gotowych transformat Laplace'a, których źródło znaleźć można w wielu poradnikach matematycznych jak również podręcznikach poświęconych rachunkowi operatorowemu. W tablicy 3.1 zestawiono wybrane przykłady transformat Laplace'a szczególnie często wykorzystywanych w praktyce. W dalszej części tego rozdziału będą one wykorzystane do wyznaczania transformat odwrotnych Laplace'a (funkcji czasu odpowiadających transformatom).

Tablica 3.1 Tablica wybranych transformat Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, \quad n \in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

Zawartość tablicy przedstawiająca zbiór funkcji czasu wraz z odpowiadającymi im transformacjami może służyć zarówno wyznaczaniu transformaty Laplace'a przy zadanej funkcji czasu jak i działaniu odwrotnemu, to jest wyznaczeniu oryginału na podstawie zadanej postaci transformaty.

3.1.1 Podstawowe własności transformacji Laplace'a.

Z wielu istniejących własności przekształcenia Laplace'a ograniczymy się tutaj do kilku podstawowych, których znajomość jest konieczna dla sprawnego posługiwania się tym narzędziem w analizie sygnałów.

Liniowość przekształcenia

Jeśli współczynniki a_1 i a_2 są dowolnymi stałymi to

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (3.3)$$

$$L^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad (3.4)$$

gdzie symbole L i L^{-1} oznaczają odpowiednio transformaty: prostą i odwrotną Laplace'a. Z własności liniowości wynika, że przekształcenie Laplace'a spełnia zasadę superpozycji.

Transformata pochodnej funkcji czasu

Transformata pochodnej funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (3.5)$$

w której $f(0^+)$ oznacza wartość początkową prawostronną funkcji $f(t)$. Mnożenie funkcji $F(s)$ przez zmienną zespoloną s odpowiada w dziedzinie czasu różniczkowaniu funkcji. Stąd operator s nazywany jest operatorem różniczkowania w dziedzinie czasu.

Transformata całki funkcji czasu

Transformata całki funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (3.6)$$

Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez $1/s$ odpowiada w dziedzinie czasu całkowaniu funkcji. Stąd operator s^{-1} jest nazywany również operatorem całkowania.

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

Rozważmy przesunięcie argumentu funkcji operatorowej Laplace'a. Oznacza to, że zamiast transformaty $F(s)$ bierzemy pod uwagę funkcję $F(s-a)$. Twierdzenie o przesunięciu argumentu zmiennej zespolonej s mówi, że spełniona jest wówczas zależność

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad (3.7)$$

Przesunięcie argumentu zespolonego s transformaty o wartość a odpowiada w dziedzinie czasu pomnożeniu funkcji oryginału przez funkcję wykładniczą e^{at} . Korzyści płynące z powyższej własności zademonstrujemy na przykładzie wyznaczania transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji o przesuniętym argumencie s .

Przesunięcie w dziedzinie czasu

Transformata Laplace'a funkcji czasu o argumencie przesuniętym względem początku układu współrzędnych spełnia następującą zależność

$$L[f(t-a) \cdot 1(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (3.8)$$

Przesunięcie argumentu funkcji oryginalnej $f(t)$ w dziedzinie czasu $f(t) \rightarrow f(t-a) \cdot 1(t-a)$ odpowiada w dziedzinie częstotliwości pomnożeniu transformaty Laplace'a funkcji oryginalnej $F(s)$ (nieprzesuniętej) przez funkcję wykładniczą e^{-as} . Własność powyższa jest często wykorzystywana przy obliczaniu transformat różnych funkcji jak również przy analizie obwodów o wymuszeniach impulsowych.

Transformata splotu

Splot stanowi ważne pojęcie w teorii obwodów i sygnałów, gdyż za jego pośrednictwem określa się odpowiedzi czasowe systemów dynamicznych. Splot dwu funkcji czasu $f_1(t)$ i $f_2(t)$ oznaczony w postaci $f_1(t) * f_2(t)$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Transformata Laplace'a splotu jest równa iloczynowi transformat poszczególnych funkcji tworzących splot

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.10)$$

Powyzsza własność nosi w matematyce nazwę twierdzenia Borela. Zauważmy, że mnożenie splotowe dwu funkcji w dziedzinie czasu odpowiada zwykłemu mnożeniu ich transformat w dziedzinie częstotliwości. Własność ta jest szczególnie wygodna w analizie systemów zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym. Zamiast żmudnych operacji w dziedzinie czasu wykonuje się transformację Laplace'a funkcji czasowych a następnie wszystkie operacje wykonuje na transformatach.

Twierdzenie o wartościach granicznych

Funkcja czasu $f(t)$ i jej transformata $F(s)$ są powiązane dwoma twierdzeniami o wartościach granicznych, które można sformułować następująco

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.12)$$

3.1.2 Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a

Aby wyznaczyć funkcję czasu $f(t)$ na podstawie danej transformaty należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Zależność definicyjna określona wzorem (3.2) jest raczej bezużyteczna ze względu na konieczność całkowania złożonych zwykle funkcji, jak również na nieokreślone precyzyjnie granice całkowania (stała c w definicji). Najczęściej korzysta się z pośrednich metod wyznaczania oryginału wynikających z własności samego przekształcenia. Niezależnie od metody zastosowanej do wyznaczenia oryginału, zakładać będziemy, że

transformata Laplace'a zadana jest w postaci wymiernej, czyli ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych.

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.13)$$

Dodatkowo przyjmujemy, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Jeśli warunek powyższy byłby niespełniony, należy podzielić licznik przez mianownik tak, aby wymusić spełnienie tego warunku. Sposób postępowania w takim przypadku zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 31

Dana jest transformata $F(s)$ o postaci

$$F(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 3s + 5}{s^2 + s + 4}$$

Dzieląc licznik przez mianownik według najwyższych potęg otrzymuje się rozwinięcie funkcji na sumę dwu składników potęgowych zmiennej s oraz funkcję wymierną spełniającą warunek, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika

$$F(s) = 2s - 1 + \frac{-4s + 9}{s^2 + s + 4}$$

Przy obliczaniu transformaty odwrotnej powyższej zależności tylko ostatni (złożony) składnik wymaga specjalnego postępowania. Składnik stały (-1) odpowiada funkcji impulsowej Diraca a funkcja $2s$ odpowiadać będzie pochodnej funkcji Diraca pomnożonej przez 2.

Istnieje wiele metod obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a, wykorzystujących własności przekształcenia. Do najbardziej popularnych należą metoda residuów, rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, metoda Heaviside'a oraz metoda bazująca na wykorzystaniu tablic transformat Laplace'a. Tutaj ograniczymy się do dwu najbardziej uniwersalnych metod: metody residuów oraz metody tablicowej wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

Metoda residuów

Założmy, że funkcja wymierna $F(s)$ zadana jest w postaci ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (3.14)$$

w którym stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Pierwiastki licznika funkcji transformaty są nazywane zerami a pierwiastki mianownika biegunami². W metodzie residuów korzysta się z następującego twierdzenia [14,20,35].

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ilorazem dwu wielomianów $L(s)$ i $M(s)$, przy czym stopień wielomianu mianownika jest wyższy niż stopień wielomianu licznika ($n > m$) to oryginał funkcji $f(t)$ określony jest następującym wzorem

$$L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] \quad (3.15)$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich biegunach funkcji operatorowej $F(s)$ niezależnie od tego, czy bieguny są pojedyncze czy wielokrotne.

Residuum funkcji $\text{res}[\circ]$ wyznacza się korzystając ze wzorów wynikających z własności przekształcenia Laplace'a. W przypadku bieguna l -krotnego wzór jest następujący

$$\text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{(l-1)}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (3.16)$$

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla bieguna jednokrotnego s_i . W takim przypadku $l=1$ i wzór na residuum ulega znacznemu uproszczeniu

$$\text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow s_i} [F(s)(s-s_i)e^{st}] \quad (3.17)$$

Wzór (3.15) wykorzystujący residuum funkcji jest stosowalny dla dowolnych biegunów funkcji $F(s)$, w tym biegunów rzeczywistych, zespolonych, jednokrotnych i wielokrotnych. Jednakże przy biegunach zespolonych obliczenie residuum wymaga wykonania wielu operacji na liczbach

² W ogólności biegun jest równy takiej wartości s , dla której funkcja $F(s)$ przyjmuje wartość nieskończoną. Podobnie zero oznacza taką wartość s , dla której $F(s)$ przyjmuje wartość zerową.

zespolonych, jest procesem dość złożonym i efekcie metoda ta nie jest konkurencyjna względem innych.

Przykład 3.2

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji $F(s)$ danej wzorem

$$F(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)}$$

Zadana funkcja ma dwa bieguny: $s_1 = -1$ oraz $s_2 = -3$. Wykorzystując wzór (3.15) otrzymuje się

$$f(t) = \text{res}_{s=s_1} [F(s)e^{st}] + \text{res}_{s=s_2} [F(s)e^{st}]$$

Na podstawie wzoru (3.16) mamy

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow s_1} [F(s)(s+1)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow s_2} [F(s)(s+3)e^{st}] = \frac{5 \cdot (-1)}{(-1+3)} e^{-1t} + \frac{5 \cdot (-3)}{(-3+1)} e^{-3t} = -2,5e^{-t} + 7,5e^{-3t}$$

Przykład 3.3

Funkcja operatorowa $F(s)$ dana jest wzorem

$$F(s) = \frac{10}{(s+3)^2(s+4)}$$

Występują 3 bieguny funkcji, z których jeden jest pojedynczy a dwa pozostałe równe sobie (jeden biegun podwójny): $s_1=s_2=-3$, $s_3=-4$. Wykorzystując odpowiednie wzory otrzymuje się następujący schemat obliczeń

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{res}_{s=s_1=s_2} [F(s)e^{st}] + \text{res}_{s=s_3} [F(s)e^{st}] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} [F(s)(s+3)^2 e^{st}] + \lim_{s \rightarrow -4} [F(s)(s+4)e^{st}] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} \left[\frac{10}{s+4} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -4} \left[\frac{10}{(s+3)^2} e^{st} \right] = 10[te^{-3t} - e^{-3t}] + 10e^{-4t} \end{aligned}$$

Metoda wykorzystująca tablice transformat

Metoda residuów jakkolwiek koncepcyjnie bardzo prosta staje się żmudna, jeśli bieguny układu są zespolone. Jest to szczególnie widoczne przy wysokich stopniach mianownika transmitancji.

W takich przypadkach zwykle korzystniejsze jest zastosowanie metody wykorzystującej tablicę transformat Laplace'a.

Przy korzystaniu z tablic transformat należy zadaną transformatę przedstawić jako sumę składników o rzędzie nie przekraczającym dwu, a następnie poprzez elementarne przekształcenia doprowadzić każdy ze składników do postaci standardowej znajdującej się w tablicy transformat (u nas tablica 3.1) odczytując z niej oryginał. Metoda jest szczególnie wygodna jeśli bieguny układu są zespolone, gdyż w procesie przekształcania transformaty nie występuje potrzeba wyznaczania tych biegunów a wszystkie obliczenia dokonywane są na wartościach rzeczywistych. W praktyce przy stosowaniu tej metody funkcję transformaty wyższego rzędu ($n > 2$) rozkłada się na składniki rzędu drugiego i pierwszego. Idea metody zostanie objaśniona na przykładach liczbowych.

Przykład 3.4

Obliczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji $F(s)$ danej w postaci

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Wobec zespolonych pierwiastków mianownika wykorzystamy tablicę transformat 3.1. Porównanie postaci danej transformaty z danymi zawartymi w tablicy wskazuje, że należy ją doprowadzić do postaci transformaty odpowiadającej funkcji sinusoidalnej tłumionej wykładniczo (wiersz 8 w tablicy). Kolejność czynności jest tu następująca

$$F(s) = \sqrt{4/3} \frac{\sqrt{3/4}}{(s + 0,5)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$$

Porównanie tej postaci z wierszem ósmym tablicy 3.1 pokazuje, że $\alpha = 0,5$ a $\omega = \sqrt{3/4}$.

Funkcja oryginału jest więc określona wzorem

$$f(t) = \sqrt{4/3} e^{-0,5t} \sin(\sqrt{3/4}t)$$

Przykład 3.5

Jako przykład drugi rozpatrzmy transformatę trzeciego rzędu o biegunach zespolonych.

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s^2 + 2s + 10)}$$

W tym przypadku przed zastosowaniem metody tablicowej należy najpierw rozłożyć funkcję zadaną na składniki o rzędach nie większych niż drugi. Ogólną postać rozkładu zapiszemy w następującej formie

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)}$$

Współczynniki A , B i C rozkładu należy wyznaczyć w taki sposób, aby obie strony zależności równały się sobie. Współczynnik A można wyznaczyć stosując metodę residuum, zgodnie z którą

$$A = \operatorname{res}_{s=-1} F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s+1) = \frac{2}{9}$$

Wobec zespolonych wartości biegunów drugiego składnika rozkładu, współczynniki B i C najlepiej jest wyznaczyć jako różnicę funkcji zadanej $F(s)$ i składnika pierwszego rzędu, to jest

$$\frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)} = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+10)} - \frac{2/9}{(s+1)} = \frac{-2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Stąd funkcja zadana $F(s)$ może być zapisana w postaci

$$F(s) = \frac{2/9}{(s+1)} - \frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Ze względu na liniowość przekształcenia Laplace'a transformata odwrotna sumy jest równa sumie transformat odwrotnych każdego składnika oddzielnie. Pierwszy składnik sumy odpowiada trzeciemu wierszowi tablicy 3.1. Stąd

$$L^{-1} \left\{ \frac{2/9}{(s+1)} \right\} = \frac{2}{9} e^{-t}$$

Składnik drugi wymaga wykonania wstępnych przekształceń doprowadzających jego postać do wierszy ósmego i dziewiątego w tablicy 3.1. W efekcie tych przekształceń otrzymuje się

$$-\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)+3 \cdot 5/6}{(s+1)^2+3^2} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Transformata odwrotna tego wyrażenia może być zatem zapisana w postaci

$$L^{-1} \left\{ -\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10} \right\} = L^{-1} \left\{ -\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \right\} = -\frac{2}{9} e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{27} e^{-t} \sin(3t)$$

Stąd na mocy twierdzenia o liniowości, transformata odwrotna Laplace'a zadanej funkcji $F(s)$ jest sumą transformat odwrotnych obu składników rozkładu

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-t}\cos(3t) - \frac{5}{27}e^{-t}\sin(3t)$$

3.1.3 Implementacja w Matlabie

Operację obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a można efektywnie zaimplementować w Matlabie wykorzystując do tego funkcję *residue* dokonującą rozkładu zadanej transformaty na ułamki proste i stosując metodę reszduów. Zakładamy, że punktem wyjścia jest postać wymierna transformaty $F(s)=L(s)/M(s)$, nieredukowalna o stopniu licznika mniejszym niż stopień mianownika. Przy równym lub wyższym stopniu licznika należy zastosować dzielenie wielomianów, realizowane w Matlabie za pomocą funkcji *deconv*

$$[R, L1] = \text{deconv}(L, M)$$

W dalszym postępowaniu zastąpić wielomian oryginalny $L(s)$ wielomianem wynikowym $L_1(s)$.

Funkcję wymierną $F(s)$ można rozłożyć na ułamki proste przy pomocy funkcji *residue*

$$[r, p, k] = \text{residue}(L, M)$$

otrzymując (przy mniejszym stopniu wielomianu licznika niż mianownika wielomian reszty k jest pusty)

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r(i)}{s - p(i)} \quad (3.18)$$

Dla powyższej postaci $F(s)$ transformata odwrotna Laplace'a jest określona wzorem

$$x(t) = \sum_{i=1}^n r(i) \exp(p(i)*t) \quad (3.19)$$

który przedstawia sobą dokładne rozwiązanie symboliczne. W praktyce zamiast podawania postaci symbolicznej rozwiązania wygodniejsze jest stabilizowanie wartości tego rozwiązania w określonym przedziale czasowym t a następnie wykreślenie jego przebiegu czasowego komendą *plot*.

Założmy dla przykładu, że dana jest transformata Laplace'a sygnału w postaci

$$F(s) = \frac{s-1}{s^4 + 0.6s^3 + 2.5s^2 + s + 0.2}$$

Oryginał funkcji uzyskamy obliczając transformatę odwrotną Laplace'a. Fragment programu w Matlabie obliczający transformatę odwrotną i kreślący przebieg napięcia w czasie dla powyższej transformaty Laplace'a pokazany jest poniżej

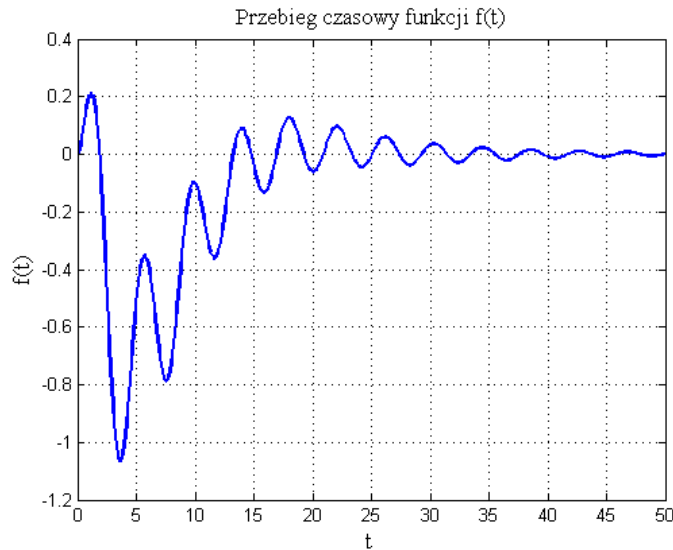
$$L=[1 \ -1];$$

```

M =[ 1  0.6  2.5  1  0.2];
t=0:0.1:50;
[r,p,k]=residue(L,M);
f=0;
for i=1:length(r)
f=f+r(i)*exp(t.*p(i));
end
plot(t,f), grid, xlabel('t'), ylabel('f(t)')
title('Przebieg czasowy funkcji f(t)')

```

Na rys. 3.1 przedstawiono uzyskany przebieg czasowy funkcji $f(t)$



Rys. 3.1. Przebieg czasowy funkcji $f(t)$ uzyskany metodą przekształcenia odwrotnego Laplace'a

Widoczne są dwie częstotliwości zanikających drgań własnych: $\omega_1=1.5268$ oraz $\omega_2=0.2030$ obie odpowiadające częściom urojonym biegunów funkcji $F(s)$ (bieguny zespolone występują zawsze w parach sprzężonych).

```

P =
-0.0895 + 1.5268i
-0.0895 - 1.5268i
-0.2105 + 0.2030i
-0.2105 - 0.2030i

```

Matlab posiada również specjalizowaną funkcję *impulse*, obliczającą i wykreślającą transformatę odwrotną Laplace'a dla zadanej transformaty. W powyższym przykładzie przebieg czasowy rozwiązania z rys. 3.1 można uzyskać przy wykorzystaniu następujących linii programu w Matlabie

```

L=[1 -1];
M =[ 1  0.6  2.5  1  0.2];
sys=tf(L,M)
impulse(sys,50), grid

```

Funkcja *impulse* może również tablicować wartości numeryczne rozwiązania. W takim przypadku wywołanie jej ma postać

```
[f,t]=impulse(sys,50), grid
```

w której **t** jest wektorem zawierającym wartości kolejnych chwil, a **f** wektorem rozwiązań w tych punktach.

3.2 Transmitancja operatorowa

W przypadku układów liniowych wygodny jest również opis transmitancyjny definiowany w dziedzinie częstotliwości zespolonej $s=\sigma+j\omega$ przy użyciu transformaty Laplace'a. Transmitancja operatorowa określa związek między transformatą operatorową sygnału wyjściowego (odpowiedzi), którą tutaj oznaczmy w ogólności przez $Y(s)$ oraz transformatą operatorową wymuszenia (sygnału wejściowego), oznaczoną ogólnie przez $U(s)$. Transmitancją operatorową nazywać będziemy stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego układu przy zerowych warunkach początkowych

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.20)$$

Jak zostało pokazane wcześniej układy liniowe o skupionych parametrach mogą być opisane w dziedzinie zmiennych stanu przez parę równań macierzowych

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (3.21)$$

W stosunku do opisu macierzowego (3.21) zastosujemy przekształcenie Laplace'a. Przy założeniu zerowych warunków początkowych i uwzględnieniu własności przekształcenia dotyczącej transformaty pochodnej, z równania (3.21) otrzymuje się

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \quad (3.22)$$

Stąd

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) \quad (3.23)$$

Poddając również drugie równanie stanu (3.21) przekształceniu Laplace'a otrzymuje się

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \quad (3.24)$$

Po uwzględnieniu zależności (3.23) otrzymuje się

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \mathbf{D}U(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) \quad (3.25)$$

Przy uwzględnieniu jednego wejścia (wymiar wektora \mathbf{u} równy jeden) i jednego wyjścia (wymiar wektora \mathbf{y} równy także jeden) wektor wyjściowy $\mathbf{Y}(s)$ staje się skalarem $Y(s)$, podobnie jak wymuszenie $U(s)$. Transmitancja operatorowa jest więc wówczas określona w postaci

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (3.26)$$

We wzorze tym macierz \mathbf{D} uprościła się do skalaru. Zauważmy, że mianownik transmitancji operatorowej jest równy wielomianowi charakterystycznemu macierzy \mathbf{A} , to jest

$$M(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) \quad (3.27)$$

Pierwiastki tego mianownika (bieguny układu) są tożsame z wartościami własnymi macierzy stanu \mathbf{A} . Stąd warunki stabilności układu zdefiniowane przy użyciu opisu stanowego przenoszą się bezpośrednio do opisu częstotliwościowego po zastąpieniu pojęcia wartości własnej przez biegun (pierwiastek $M(s)$). Wzór (3.27) stanowi związek między opisem stanowym układu a opisem transmitancyjnym.

Własności dynamiczne układów wygodnie jest badać na podstawie odpowiedzi impulsowej $h(t)$ lub skokowej $y(t)$. **Odpowiedź impulsowa** jest to odpowiedź czasowa układu na wymuszenie w postaci funkcji impulsowej Diraca, której transformata Laplace' jest równa 1. Przy uwzględnieniu tego faktu z definicji transmitancji wynika, że $Y(s)=H(s)$. Stąd odpowiedź impulsowa $h(t)=y(t)$ jest równa transformacie odwrotnej Laplace'a transmitancji operatorowej $H(s)$.

$$h(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[H(s)]$$

Odpowiedzią skokową układu nazywamy odpowiedź czasową tego układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego $I(t)$ przy zerowych warunkach początkowych obwodu. Biorąc pod uwagę, że transformata Laplace'a funkcji jednostkowej $I(t)$ jest równa $1/s$ otrzymuje się

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{1/s} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} H(s) \quad (3.28)$$

Odpowiedź skokowa jako transformata odwrotna Laplace'a sygnału $Y(s)$ jest równa

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} H(s)\right] \quad (3.29)$$

Odpowiedź skokowa układu jest więc transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej $H(s)$ tego układu, podzielonej przez zmienną zespoloną s . Podobnie jak odpowiedź impulsowa odpowiedź skokowa jest określona w pełni przez transmitancję operatorową $H(s)$ układu.

3.3 Transformacje opisów układu w dziedzinie częstotliwości zespolonej

Opis częstotliwościowy liniowych układów dynamicznych o parametrach skupionych ma następującą **postać transmitancyjną**

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.30)$$

reprezentowany w Matlabie poprzez dwa wektory liczbowe $L=[b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0]$ oraz $M=[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$. Pierwiastki licznika $L(s)$ nazywane są zerami układu a pierwiastki mianownika $M(s)$ biegunami.

Inną alternatywną reprezentacją częstotliwościową układu dynamicznego jest **postać zero-biegunowa**. Oznaczając zera układu przez z_i a bieguny przez p_i postać zero-biegunową dla układu dynamicznego można przedstawić następująco

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.31)$$

Reprezentacja zero-biegunowa w Matlabie zadana jest trójką parametrów $[p, z, k]$, w której z reprezentuje zbiór zer, p – zbiór biegunów a k jest współczynnikiem występującym we wzorze na transmitancję $H(s)$. Istnieje wiele metod transformacji dowolnego opisu układu do postaci zero-biegunowej. W Matlabie przy wyjściowej postaci transmitancyjnej rolę taką pełni funkcja *tf2zp*.

W zastosowaniach praktycznych, zwłaszcza w syntezie układów, wygodną formą reprezentacji systemu dynamicznego jest **postać rozkładu na ułamki proste**. Można ją przedstawić następująco

$$H(s) = K(s) + \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \quad (3.32)$$

Zmienne p_i są biegunami układu, r_i – residuami a $K(s)$ reprezentuje wielomian, który ma postać niezerową jedynie w przypadku, gdy stopień licznika jest większy lub równy stopniowi mianownika. W Matlabie można uzyskać postać ułamków prostych przy zastosowaniu funkcji *residue*.

W postaci (3.32) założono, że bieguny są pojedyncze. Bieguny wielokrotne są również obsługiwane przez tę funkcję a postać odpowiedniego wielomianu podana jest w *help* funkcji *residue*.

Istnieje wzajemna równoważność obu opisów czasowego i częstotliwościowego. Transformacja opisu stanowego w transmitancyjny jest jednoznaczna i dana wzorem

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.33)$$

Transformacja odwrotna, czyli przejście z opisu transmitancyjnego na opis stanowy jest wieloznaczna (wiele rozwiązań). Matlab przyjmuje postać stowarzyszoną wierszowo. W przypadku skalarnej transmitancji operatorowej (jedno wejście i jedno wyjście układu) danej wzorem (3.30) o stopniu licznika mniejszym niż stopień mianownika macierze stanu przyjmowane są w następującej postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0], D = 0 \quad (3.34)$$

Wartości współczynników wielomianu licznika i mianownika transmitancji operatorowej w pełni opisują więc postać stanową opisu układu.

Jako przykład rozpatrzmy układ dynamiczny opisany funkcją transmitancji operatorowej $H(s)$ daną w postaci

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{s^4 + 4}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 8s^2 + 7s + 5}$$

Dane wejściowe dla programu należy podać w postaci wielomianów licznika $L(s)$ oraz mianownika $M(s)$, przedstawionych w formie tablicy

```
L=[1 0 0 0 4]
M=[1 2 3 8 7 5]
```

Przejście do opisu stanowego otrzymuje się komendą

```
[A, B, C, D]=tf2ss(L, M)
```

generującą opis stanowy o postaci

```
A =          B =          C =          D =
   -2   -3   -8   -7   -5          1          1  0  0  0  4          0
    1    0    0    0    0          0          0
    0    1    0    0    0          0          0
```

```

0 0 1 0 0      0
0 0 0 1 0      0

```

Transformację opisu transmitancyjnego w zero-biegunowy otrzymuje się przy użyciu komendy

```
[z,p,k]=tf2zp(L,M)
```

W wyniku otrzymuje się

```

z =                p =                k =
-1.0000 + 1.0000i    -1.9606                1
-1.0000 - 1.0000i    0.4828 + 1.6812i
 1.0000 + 1.0000i    0.4828 - 1.6812i
 1.0000 - 1.0000i   -0.5024 + 0.7623i
                    -0.5024 - 0.7623i

```

Rozkład na ułamki proste otrzymamy przy wywołaniu funkcji residue

```
[r,p,k]=residue(L,M)
```

Wynik dany jest w postaci

```

r =                p =                k =
 0.7884            -1.9606                []
 0.0670 + 0.3230i    0.4828 + 1.6812i
 0.0670 - 0.3230i    0.4828 - 1.6812i
 0.0388 - 0.3976i    -0.5024 + 0.7623i
 0.0388 + 0.3976i    -0.5024 - 0.7623i

```

Odpowiada on następującej postaci transmitancji $H(s)$

$$H(s) = \frac{0,7884}{(s+1,9606)} + \frac{0,067 + j0,323}{(s-0,4828 - j1,6812)} + \frac{0,067 - j0,323}{(s-0,4828 + j1,6812)} + \frac{0,0388 - j0,3976}{(s+0,5024 - j0,7623)} + \frac{0,0388 + j0,3976}{(s+0,5024 + j0,7623)}$$

Ze względu na zespolone wartości biegunów postać $H(s)$ operuje wartościami zespolonymi współczynników. W tym przypadku wygodniejsza jest postać bikwadratowa transmitancji, w której wszystkie współczynniki są rzeczywiste. Można ją otrzymać na przykład przy pomocy komendy

```
[sos,g]=zp2sos(L,M)
```

W wyniku otrzymuje się

```

sos =
 0      1.0000      0      1.0000      1.9606      0
 1.0000 -2.0000      2.0000      1.0000 -0.9655      3.0594
 1.0000      2.0000      2.0000      1.0000      1.0049      0.8336

g =
1

```

Macierz sos składa się z wierszy reprezentujących poszczególne transmitancje bikwadratowe układu dyskretnego (pierwsze 3 kolumny to współczynniki licznika, pozostałe 3 - współczynniki mianownika). W przypadku systemu ciągłego interpretacja uzyskanego wyniku odpowiada następującej postaci transmitancyjnej

$$H(s) = \frac{1}{(s+1,9606)} \cdot \frac{(s^2 - 2s + 2)}{(s^2 - 0,9655s + 3,0594)} \cdot \frac{(s^2 + 2s + 2)}{(s^2 - 1,0049s + 0,8336)}$$

3.4. Transmitancje układów dynamicznych drugiego rzędu

Szczególnym przypadkiem transmitancji operatorowej jest transmitancja drugiego rzędu, zwana **bikwadratową**, szczególnie często wykorzystywana w teorii systemów. Ogólna postać tej transmitancji dana jest wzorem

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (3.35)$$

W przypadku wykorzystania tej transmitancji w teorii filtrów wielomiany licznika i mianownika zakłada się w specjalnej postaci. W przypadku mianownika przyjmuje się

$$M(s) = s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \quad (3.36)$$

Wielkość ω_0 jest pulsacją środkową (rezonansową) filtru a Q dobrocią. Postać licznika transmitancji jest uzależniona od rodzaju filtru. Tutaj rozpatrzmy przykładowo cztery podstawowe rodzaje filtrów i ich transmitancje. Są to

- Filtr dolnoprzepustowy

$$H_{DP}(s) = \frac{A_{DP}\omega_0^2}{M(s)} \quad (3.37)$$

Wielkość A_{DP} jest wzmocnieniem filtru w paśmie przepustowym i mierzona jest dla $s = 0$.

- Filtr środkowoprzepustowy

$$H_{SP}(s) = \frac{A_{SP} \frac{\omega_0}{Q} s}{M(s)} \quad (3.38)$$

Wielkość A_{SP} jest wzmocnieniem filtru w paśmie przepustowym i zdefiniowana jest dla pulsacji $s = j\omega_0$.

- Filtr górnoprzepustowy

$$H_{GP}(s) = \frac{A_{GP}s^2}{M(s)} \quad (3.39)$$

Wielkość A_{GP} jest wzmocnieniem filtru w paśmie przepustowym i mierzona jest dla pulsacji równej $s = \infty$.

- Filtr środkowo-zaporowy

$$H_{SZ}(s) = \frac{s^2 + \omega_z^2}{M(s)} \quad (3.40)$$

Filtr ten blokuje przepływ sygnałów o częstotliwościach w pobliżu pulsacji zaporowej ω_z .

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów otrzymuje się po wstawieniu $s = j\omega$ do transmitancji operatorowej odpowiadającej danemu rodzajowi filtru. Moduł zależności wyznacza charakterystykę amplitudową a kąt fazowy – charakterystykę fazową.

4. KRYTERIA ALGEBRAICZNE STABILNOŚCI SYSTEMÓW LINIOWYCH CZASU CIĄGŁEGO (Stability criteria of analog linear systems)

Stabilność układów liniowych można badać bezpośrednio na podstawie transmitancji operatorowej bez potrzeby obliczania biegunów (wartości własnych). Celowi temu służą liczne algebraiczne kryteria stabilności, z których ograniczymy się tutaj do dwu: kryterium Hurwitza i kryterium Routha.

4.1 Kryterium Hurwitza

Jednym z najprostszych jest kryterium Hurwitza. W roku 1895 Adolf Hurwitz podał warunki jakie musi spełniać wielomian, aby jego pierwiastki leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Przyjmijmy wielomian mianownika $M(s)$ transmitancji operatorowej w postaci

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.1)$$

Wielomian (4.1) nazywamy wielomianem Hurwitza, albo wielomianem stabilnym, jeśli jego pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Warunek stabilności Hurwitza

Wielomian $M(s)$ o postaci (4.1) jest wielomianem stabilnym, jeśli wszystkie współczynniki a_i istnieją i są większe od zera a wszystkie minory główne są dodatnie, tzn. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0$.

Minory główne oblicza się według następujących wzorów:

Macierz Hurwitza:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Minory główne:

$$\Delta_1 = a_{n-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_m = \det(H_m)$$

Bezpośrednie zastosowanie twierdzenia Hurwitza wymaga obliczenia $n-1$ wyznaczników macierzy Hurwitza.

Przykład 4.1

Określić stabilność systemu o $M(s) = s^3 + s^2 + 4s + 20$

Warunek pierwszy jest spełniony, gdyż wielomian ma wszystkie współczynniki dodatnie.

Obliczamy wyznaczniki Δ_1 i Δ_2

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

Warunek drugi nie jest spełniony. Wielomian nie spełnia warunków stabilności. Jego wszystkie pierwiastki nie leżą w lewej półplastycznie.

Przykład 4.2

Przy użyciu kryterium Hurwitza sprawdzić warunek doboru k , aby system o mianowniku $M(s)$ transmitancji był stabilny

$$M(s) = s^4 + 2s^3 + ks^2 + 4s + 5$$

Wszystkie współczynniki muszą być dodatnie, więc $k > 0$. Obliczmy wyznaczniki

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2k - 4 > 0 \rightarrow k > 2 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & k & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8k - 36 > 0 \rightarrow k > 4,5 \end{aligned}$$

Stąd system będzie stabilny pod warunkiem, że $k > 4.5$.

Wady kryterium Hurwitza:

- Klasyczne kryterium Hurwitza wymaga obliczenia $n-1$ wyznaczników stopnia od 1 aż do $n-1$ włącznie
- Obliczenie wyznacznika stopnia k jest o złożoności k^2 .
- Niedogodne dla wielomianów wysokiego stopnia

4.2. Kryterium Routha

Wymienionych wyżej wad nie posiada kryterium Routha, które wymaga sprawdzenia większej liczby wyznaczników, ale wyłącznie stopnia drugiego, łatwego w obliczeniach. Aby sprawdzić stabilność systemu należy w pierwszej kolejności skonstruować tablice Routha.

Układ jest stabilny, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

- warunek konieczny (analogiczny jak w kryterium Hurwitz'a): wszystkie współczynniki równania charakterystycznego (4.1) istnieją i są większe od zera,
- warunek dostateczny: polega na utworzeniu i zbadaniu tablicy Routh'a. Na tej podstawie podejmuje się decyzję o stabilności

Pierwszym etapem w kryterium Routh'a jest umieszczenie współczynników równania charakterystycznego (4.1) w dwóch wierszach. Jeden wiersz składa się z nieparzystych współczynników, a drugi składa z parzystych współczynników licząc od najwyższej potęgi wielomianu charakterystycznego. Dla równania charakterystycznego (4.1) pierwsze dwa wiersze tablicy Routh'a są postaci:

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & & \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & & \end{array}$$

Kolejnym etapem jest wypełnienie następnych wierszy tablicy Routh'a, mianowicie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & & \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & & \\
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & & \\
 d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & & & \\
 e_1 & e_2 & \cdots & & & & \\
 f_1 & \cdots & & & & & \\
 a_0 & & & & & &
 \end{array}$$

Elementy kolejnych wierszy tablicy obliczane są według następujących wzorów:

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; \quad b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \dots$$

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}; \quad c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}; \quad c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} \dots$$

$$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_1}; \quad d_2 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1}; \quad d_3 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}}{c_1} \dots$$

$$e_1 = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{d_1}; \quad e_2 = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{d_1}; \quad e_3 = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix}}{d_1} \dots$$

$$f_1 = \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix}}{e_1} \dots$$

Liczba wierszy tablicy Routha jest równa licznie współczynników równania charakterystycznego (stopień wielomianu plus 1). Ostatni wiersz tablicy zawiera tylko jeden element a_0 wielomianu charakterystycznego. Po obliczeniu współczynników tablicy Routh'a stosujemy warunek wystarczający **kryterium stabilności** w postaci:

Układ dynamiczny jest stabilny, gdy wszystkie współczynniki lewej skrajnej kolumny tablicy Routha są dodatnie. Jeśli układ jest niestabilny, to współczynniki tej kolumny zmieniają znak, a liczba zmian ich znaku równa jest liczbie pierwiastków położonych w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Przykład 4.3

Dane jest następujące równanie charakterystyczne układu:

$$M(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

Korzystając z kryterium Routh'a zbadamy stabilność tego układu.

- 1) Warunek konieczny jest spełniony, ponieważ wszystkie współczynniki równania charakterystycznego istnieją i są większe od zera.
- 2) Należy teraz zbudować tablice Routha na podstawie współczynników

$$\begin{array}{ccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \end{array}$$

które w naszym przykładzie mają postać

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & 0 \end{array}$$

Kolejne elementy tablicy obliczane są według wzorów

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{1} = -7; \quad b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{- \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 10;$$

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix}}{-7} = 6,43$$

Stąd pełna tablica Routha dla tego przypadku przyjmuje postać:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 2 & 3 & 10 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 1 & 5 & 0 \\ b_1 & b_2 & & = -7 & 10 & \\ c_1 & & & 6,43 & & \\ a_0 & & & 10 & & \end{array}$$

Mamy dwie zmiany znaków w lewej skrajnej kolumnie, co oznacza, że równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie, zatem układ jest niestabilny.

Potwierdzeniem tego jest położenie pierwiastków wielomianu mianownika $M(s)$ w lewej półpłaszczyźnie. Zgodnie z komenda Matlaba $roots(M)$ uzyskuje się następujące położenia biegunów:

$$\text{bieguny}=[0.7555+1.4444i; 0.7555-1.4444i; -1.0055+0.9331i; -1.0055-0.9331i]$$

W trakcie tworzenia tablicy Routha może się zdarzyć, że tylko pierwszy element wiersza jest zerowy, pozostałe różne od zera. Można wówczas zero zastąpić poprzez małą wartość ε i kontynuować rozwijanie tablicy, obliczając na końcu granice przy ε dążącym do zera. Wynik końcowy tablicy interpretowany jak w zwykłym przypadku.

W trakcie obliczeń może zdarzyć się również przypadek, że cały wiersz przy odpowiedniej potęgce będzie zerowy. W takim przypadku dla tego wiersza tworzy się wielomian $P(s)$ o współczynnikach równych współczynnikom wiersza powyżej (zmiana potęg o dwa). Wiersz zerowy zastępuje się współczynnikami wielomianu powstałego po zróżniczkowaniu $P(s)$ względem s .

Procedura jest wówczas następująca:

1. Tworzy się równanie pomocnicze $P(s) = 0$ przez użycie współczynników z wiersza znajdującego się powyżej wiersza zerowego.
2. Wyznacza się pochodną równania pomocniczego względem s ; daje to $dp(s) / ds = 0$.
3. Zastępuje się wiersz zerowy współczynnikami wielomianu $dp(s) / ds = 0$.
4. Kontynuuje się wypełnianie tablicy Routha z użyciem nowo utworzonego wiersza współczynnikami zastępującymi wiersz zerowy.
5. Interpretuje się zmianę znaków współczynników w pierwszej kolumnie tablicy Routha w zwykły sposób.

Przykład 4.4

$$M(s) = s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

Tablica Routha ma postać

s^4	1	6	8	
s^3	3	12	0	
s^2	2	8	0	
s^1	0	0		$\rightarrow P(s) = 2s^2 + 8 \rightarrow dP(s)/ds = 4s$
s^1	4			
s^0	8			

Wszystkie znaki w pierwszej kolumnie identyczne, stad układ stabilny.

5. SYSTEMY ZE SPRZEŻENIEM ZWROTNYM (Feedback systems)

5.1 Pojęcia podstawowe

W teorii systemów dynamicznych ważną rolę odgrywają układy ze sprzężeniem zwrotnym. Znajdują one powszechne zastosowanie m.in. w automatyce, mechanice, elektronice, biologii, naukach społecznych itp. Sprzężenie polega na zwrotnym oddziaływaniu skutku określonego zjawiska na jego przyczynę i zachodzi gdy sygnał wyjściowy układu oddziałuje zwrotnie na jego sygnał wejściowy. Rozróżnia się sprzężenie dodatnie i ujemne. Przy sprzężeniu dodatnim skutek podtrzymuje przyczynę, powodując zwykle dalsze narastanie skutku. Sprzężenie ujemne działa stabilizująco na proces powodując, że skutek zjawiska przeciwdziała jego przyczynie.

Sprzężenie zwrotne jest dodatnie, gdy faza sygnału zwrotnego doprowadzonego z wyjścia do wejścia układu jest zgodna z fazą sygnału wejściowego. Przy zgodności faz obu sygnałów sterujących obiektem, efektywny sygnał sterujący ulega zwiększeniu. Oznacza to, że współczynnik b - określający jaką część sygnału wyjściowego zostaje doprowadzona na wejście - jest dodatni. Dodatnie sprzężenie zwrotne jest podstawą działania generatorów, przy czym warunki generacji można wyrazić następująco: układ działa jak generator, gdy sprzężenie zwrotne jest dodatnie i dostatecznie silne aby podtrzymywać drgania.

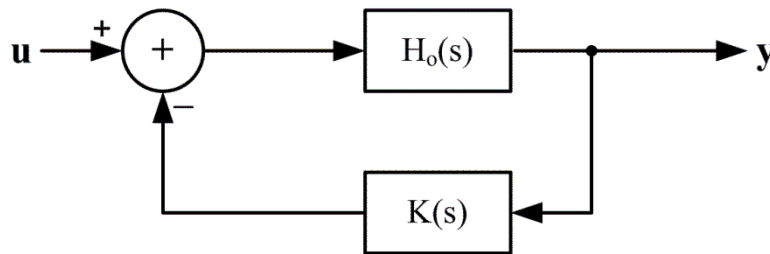
Sprzężenie zwrotne jest ujemne, gdy faza sygnału zwrotnego doprowadzonego z wyjścia do wejścia układu jest przeciwna w porównaniu z fazą sygnału wejściowego. Ujemne sprzężenie zwrotne powoduje zmniejszenie wzmocnienia obiektu. Wynika to z faktu, że w układzie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym doprowadzona na wejście część sygnału wyjściowego ma przeciwną fazę niż sygnał wejściowy a więc odejmuje się od sygnału wejściowego. W rezultacie na wejściu obiektu występuje mniejszy sygnał niż w przypadku braku ujemnego sprzężenia zwrotnego. Przy mniejszym sygnale wejściowym również sygnał wyjściowy ma mniejszą wartość. Ze względu na to, że źródło sygnału nie jest objęte pętlą sprzężenia zwrotnego, przy tym samym napięciu źródła otrzymujemy mniejsze napięcie wyjściowe, a zatem wzmocnienie układu ulega zredukowaniu.

Ujemne sprzężenie zwrotne, szeroko stosowane w układach wzmacniających, wpływa na ogół korzystnie na większość parametrów systemu:

- poprawia stabilność systemu (układ jest mniej wrażliwy np. na wahania napięć zasilających i zmianę temperatury);
- pozwala ustabilizować system (system otwarty niestabilny, zamknięty może być stabilny)

- zmniejszają się szумы i zniekształcenia (tak liniowe, jak i nieliniowe);
- zwiększa się górna częstotliwość graniczna systemu (czyli ulega poszerzeniu pasmo).
- możliwe jest kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej;
- możliwa jest modyfikacja impedancji wejściowej (zwiększenie) i wyjściowej (zmniejszenie wartości).

Tego typu rozwiązanie znajduje szerokie zastosowanie w układach sterowania i stanowi istotę regulacji automatycznej. W dalszych rozważaniach przyjmujemy ogólny model układu zamkniętego ze sprzężeniem ujemnym. Przykładowy schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym przedstawia rys. 5.1



Rys. 5.1 Ogólny schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym

Transmitancja układu otwartego obiektu (plant) będzie oznaczona jako $H_o(s)$ lub $G_o(s)$ a blok sprzężenia zwrotnego (controller) określony transmitancją $K(s)$. Sprzężenie zwrotne jest ujemne (znak minus w torze sprzężenia). Przy takich założeniach transmitancja zastępcza $H(s)$ układu wyrażona jest w postaci

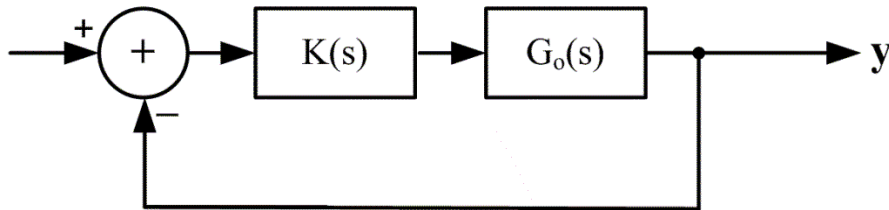
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_o(s)}{1 + K(s)H_o(s)} \quad (5.1)$$

W przypadku gdy tor sprzężenia zwrotnego ma transmitancję $K(s)=1$ transmitancja układu zamkniętego przyjmuje uproszczoną postać

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_o(s)}{1 + H_o(s)} \quad (5.2)$$

Sprzężenie zwrotne ma istotny wpływ na działanie układu zamkniętego. Może służyć zarówno stabilizacji obiektu (gdy działanie samodzielne jest niestabilne lub bliskie granicy stabilności) lub zmianie charakteru działania systemu (np. skrócenie czasu trwania stanu nieustalonego, zmiana charakteru odpowiedzi z oscylacyjnej na aperiodyczną lub odwrotnie).

Przyjmować będziemy transmitancje obiektu i kontrolera (regulatora) w postaci wymiernej $L(s)/M(s)$. W układach sterowania regulator jest często włączany kaskadowo z obiektem przy jednostkowej transmitancji toru sprzężenia (rys. 5.2).



Rys. 5.2 Schemat kontrolera włączonego kaskadowo z obiektem w układzie ze sprzężeniem zwrotnym

Oznacza to, że transmitancja takiego układu zamkniętego wyraża się wzorem

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s)G_o(s)}{1 + K(s)G_o(s)} \quad (5.3)$$

podczas gdy transmitancja układu otwartego jest równa $H_o(s) = K(s)G_o(s)$. W dalszym ciągu rozważać będziemy model sprzężenia przy jednostkowej transmitancji sprzężenia zwrotnego. Po otwarciu pętli sprzężenia zwrotnego transmitancja układu otwartego jest równa $H_o(s) = K(s)G_o(s)$.

W praktyce inżynierskiej wykorzystuje się cztery standardowe typy regulatorów. Są to

- Regulator proporcjonalny P o transmitancji (proportional controller)

$$K(s) = k_p \quad (5.4)$$

- Regulator proporcjonalno-całkujący PI o transmitancji (proportional-integral controller)

$$K(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (5.5)$$

- Regulator proporcjonalno-różniczkujący PD o transmitancji (proportional-derivative controller)

$$K(s) = k_p (1 + T_d s) \quad (5.6)$$

- Regulator proporcjonalny całkująco-różniczkujący PID o transmitancji (proportional-integral-derivative controller)

$$K(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5.7)$$

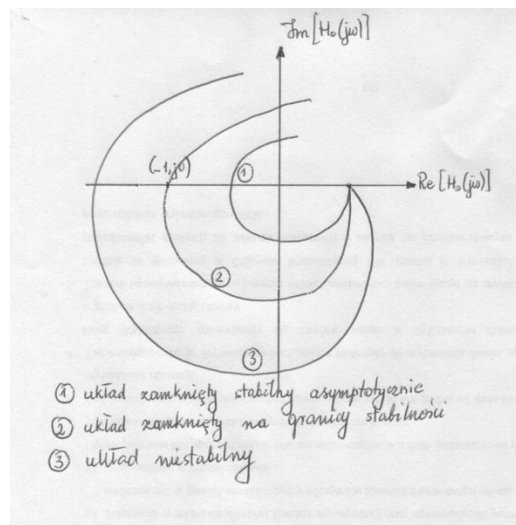
5.2 Kryterium stabilności Nyquista

Badanie stabilności układu zamkniętego jest możliwe na podstawie transmitancji widmowej układu otwartego (po przerwaniu pętli sprzężenia) na podstawie twierdzenia Nyquista. Kryterium Nyquista jest bardziej praktyczne niż Hurwitza czy Routha, gdyż nie wymaga znajomości transmitancji operatorowej układu a wnioskowanie o stabilności opiera na charakterystyce widmowej układu otwartego $H_o(s=j\omega)$. Charakterystyki widmowe (amplitudowa i fazowa) łatwo jest zmierzyć dla konkretnego układu.

Kryterium Nyquista

- Jeśli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie to pozostanie tak samo stabilny po zamknięciu, gdy charakterystyka obiektu otwartego $H_o(s=j\omega)$ dla $0 \leq \omega < \infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ na płaszczyźnie zespolonej $[\text{Re}(H_o(j\omega)), \text{Im}(H_o(j\omega))]$.
- Gdy charakterystyka $H_o(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$ to układ zamknięty jest na granicy stabilności (jest stabilny, ale nie asymptotycznie – w układzie występują drgania o stałej amplitudzie).
- Gdy charakterystyka $H_o(j\omega)$ obejmuje punkt $(-1, j0)$ to układ zamknięty jest niestabilny.

Ilustruje to rys. 5.3.



Rys. 5.3 Ilustracja graficzna kryterium Nyquista dla różnych przypadków stabilności układu

Przykład 5.1

Jako przykład rozpatrzmy obiekt z opóźnieniem o transmitancji

$$H_o(s) = \frac{k}{sT_2 + 1} e^{-sT_1}$$

dla $T_1=\pi$, $T_2=2\pi$, $k=1$. Rozpatrzmy również wpływ wzmocnienia k na stabilność układu zamkniętego.

- a) Stabilność układu otwartego według kryterium Hurwitza wymaga, aby współczynniki mianownika były dodatnie, co jest spełnione \rightarrow układ otwarty jest więc stabilny.
- b) Sprawdzenie stabilności układu zamkniętego wymaga obliczenia transmitancji widmowej $H_o(j\omega)$. Oznacza to, że

$$H_o(j\omega) = \frac{k}{j\omega T_2 + 1} e^{-j\omega T_1} = \frac{k}{1 + (\omega T_2)^2} [(\cos \omega T_1 - \omega T_2 \sin \omega T_1) - j(\sin \omega T_1 + \omega T_2 \cos \omega T_1)] = P(\omega) - jQ(\omega)$$

Dla $\omega=0$ mamy $H_o(j\omega)=k$. Poszukujemy przecięcia charakterystyki amplitudowo-fazowej z osią rzeczywistą dla pulsacji krytycznej $\omega=\omega_k$, co oznacza $\text{Im}[H_o(j\omega_k)]=0$, czyli

$$(\sin \omega_k T_1 + \omega_k T_2 \cos \omega_k T_1) = 0 \rightarrow (\omega_k T_2 + \text{tg} \omega_k T_1) = 0$$

Rozwiązanie powyższego równania nieliniowego dla przyjętych wartości stałych czasowych $T_1=\pi$ i $T_2=2\pi$ daje $\omega_k=0.585$ rad/s/. Wstawiając tę wartość do wzoru na $H_o(j\omega_k)$ otrzymuje się dla znamionowej wartości $k=1$, $\text{Re}[H_o(j\omega_k)]=-0.267$. Oznacza to spełnienie warunku stabilności asymptotycznej układu zamkniętego, gdyż $-1 < -0.267 < 0$.

Następny problem dotyczy określenia maksymalnej wartości wzmocnienia k przy której system zamknięty pozostaje jeszcze stabilny. Oznacza to rozwiązanie zadania

$$k \text{Re}[H_o(j\omega_k)] = -1, \text{ z którego otrzymuje się } k = \frac{-1}{\text{Re}[H_o(j\omega_k)]} = 3.75. \text{ Stąd maksymalna wartość}$$

k dla zadanych stałych czasowych systemu jest równa 3.75.

W ogólności kryterium Nyquista jest zdefiniowane również dla systemu otwartego niestabilnego (część biegunów w prawej półpłaszczyźnie). Jego treść można w tym przypadku przedstawić następująco:

System czasu ciągłego z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej (charakterystyki Nyquista) systemu otwartego $H_0(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ okrąży punkt $s = (-1, j0)$ dokładnie m razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdzie m jest liczbą biegunów funkcji $H_0(s)$ położonych w prawej półpłaszczyźnie $Re(s) > 0$

Tego typu zadanie jest mało praktyczne, gdyż wymaga z góry znajomości transmitancji operatorowej i jej biegunów.

Przykład 5.2

Zbadać stabilność układu zamkniętego o transmitancji obiektu $G_o(s) = \frac{10}{3s^3 + 2s^2 + s + 1}$ i transmitancji $K(s) = 1.9s + 1$ kontrolera włączonego kaskadowo z obiektem wg rys. 5.2 stosując metodę Nyquista. Transmitancja układu otwartego reprezentowanego przez to połączenie ma postać

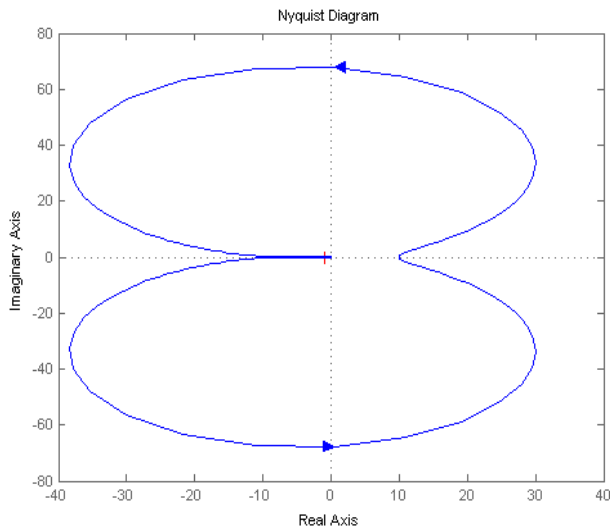
$$G_o(s) = \frac{10(1.9s + 1)}{3s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Układ otwarty jest niestabilny, gdyż jego 2 bieguny leżą w prawej półpłaszczyźnie: $s_1 = -0.7839$, $s_2 = 0.0586 + j0.6495$, $s_3 = 0.0586 - j0.6495$.

Wykreślenie krzywej Nyquista przy wykorzystaniu linii komend Matlaba

```
L=[19 10];
M=[3 2 1 1];
sys=tf(L,M)
%w=-10000:0.01:10000;
nyquist(sys);
```

Przebieg krzywej wykreślony w Matlabie przedstawiony jest na rys. 5.4.



Rys. 5.4 Przebieg krzywej Nyquista w przykladzie

Przebieg krzywej pokazuje, że układ zamknięty jest stabilny. Potwierdzeniem jest jego transmitancja układu zamkniętego o postaci

$$H(s) = \frac{(19s + 10)(3s^3 + 2s^2 + s + 1)}{3s^3 + 2s^2 + 20s + 11}$$

której bieguny są równe: $s_1 = -0.0558 + j2.5694$, $s_2 = -0.0558 - j2.5694$, $s_3 = -0.5552$.

Przykład 5.3

Zbadać stabilność układu zamkniętego ze wzmacnieniem jednostkowym w torze sprzężenia zwrotnego, jeśli układ otwarty jest stabilny a jego transmitancja wyrażona jest w postaci

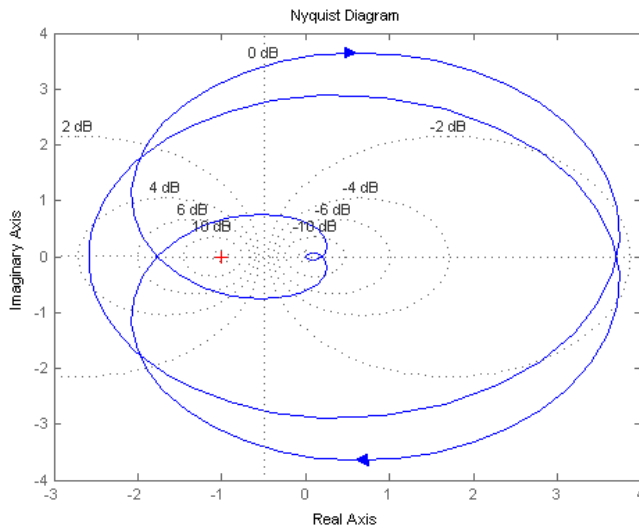
$$H_o(s) = L_o(s)/M_o(s), \text{ gdzie } L_o(s) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6, \text{ } M_o(s) = s^4 + 3.8s^3 + 5.56s^2 + 5.08s + 2.32$$

Wywołanie linii programu w Matlabie

```
sys=tf(Lo,Mo)
```

```
nyquist(sys), grid
```

generuje wynik w postaci wykresu Nyquista przedstawionego na rys. 5.5.

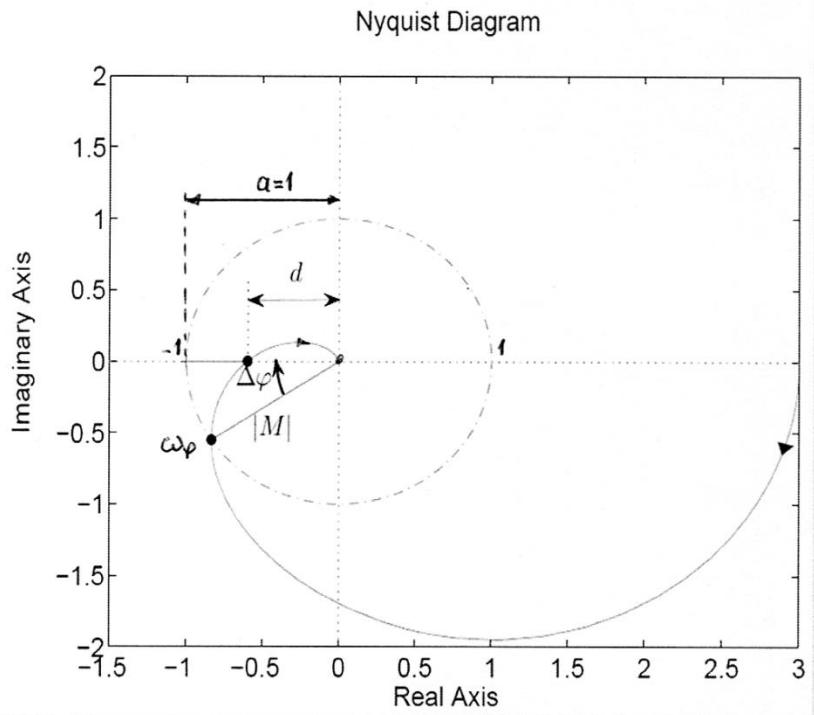


Rys. 5.5 Wykres charakterystyki Nyquista dla stabilnego systemu otwartego opisanego transmitancją $H_o(s)$. System zamknięty jest niestabilny.

System zamknięty jest ewidentnie niestabilny, gdyż wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej okrąży punkt $(-1, j0)$, a w przypadku układu otwartego stabilnego nie powinien. Potwierdzeniem tego jest mianownik transmitancji układu zamkniętego $H(s)=L_o(s)+M_o(s)=s^4+4.8s^3-0.44s^2+16.08s-3.68$, którego pierwiastki są równe $s_1=-5.4458$, $s_2=0.2096 + j1.714$, $s_3=0.2096-j1.7140$, $s_4=0.2266$ (trzy bieguny w prawej półpłaszczyźnie).

5.3 Zapas stabilności

Zapas stabilności układu charakteryzuje odległości modułu i fazy krzywej Nyquista od punktu krytycznego $(-1, j0)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Wyróżnia się zapas modułu (amplitudy) i fazy. Obie wielkości wyznaczone są na podstawie krzywej Nyquista dla układu otwartego. Idea definicji zapasu stabilności przedstawiona jest na rys. 5.6.



Rys. 5.6 Ilustracja pojęcia zapasu amplitudy i fazy.

Zapas modułu jest zdefiniowany w postaci

$$\alpha = \frac{a}{d} = \frac{1}{d}$$

Układ ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, gdy $\alpha > 1$; jest na granicy stabilności, gdy $\alpha = 1$; jest niestabilny, gdy $\alpha < 1$. Wzór ten ma zastosowanie, gdy mamy wyznaczoną charakterystykę widmową obiektu otwartego.

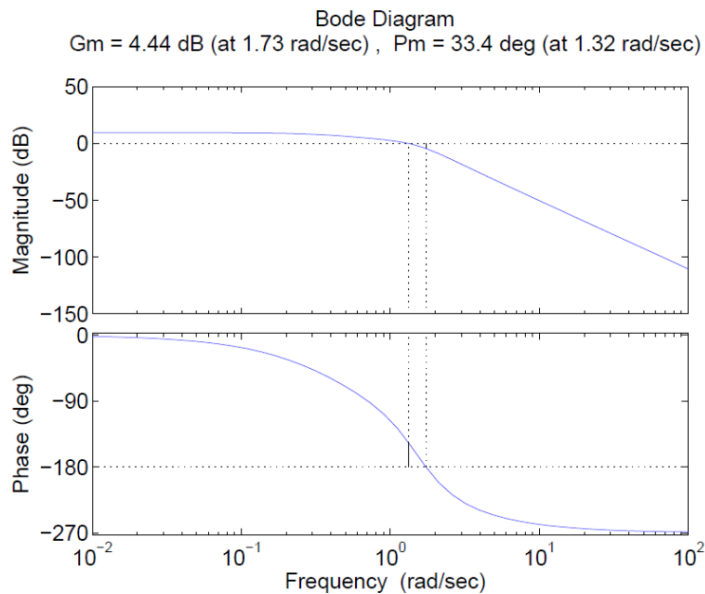
Zapas fazy jest zdefiniowany w postaci

$$\Delta\varphi = 180^\circ + \arctg \frac{Q(\omega_\varphi)}{P(\omega_\varphi)}$$

gdzie $P(\omega_\varphi)$ oznacza część rzeczywistą a $Q(\omega_\varphi)$ część urojona transmitancji widmowej układu otwartego w punkcie ω_φ w którym charakterystyka Nyquista przecina okrąg jednostkowy. W większości przypadków wymaga się od układów sterowania zapasu modułu $\alpha \geq 2$ (w skali logarytmicznej odpowiada to 6dB) i zapasu fazy $\Delta\varphi \geq 30^\circ$.

Zapas modułu i fazy można również prosto zinterpretować na charakterystykach częstotliwościowych logarytmicznych Bodego określonych dla systemu otwartego. Zapas fazy

odpowiada różnicy fazowej pomiędzy kątem -180° a wartością fazy dla częstotliwości przy której charakterystyka amplitudowa ma wartość jednostkową (w skali logarytmicznej wartość zero). Zapas modułu (w skali logarytmicznej) to odchylenie charakterystyki logarytmicznej od wartości zerowej (amplituda równa 1) dla częstotliwości w której charakterystyka fazowa przyjmuje wartość kąta równą -180° . Rys. 5.7 ilustruje graficznie definicję obu zapasów na charakterystykach częstotliwościowych Bodego.

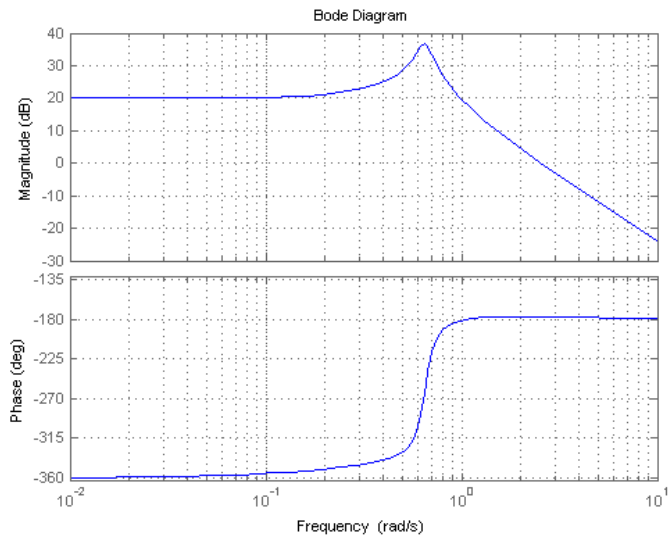


Rys. 5.7 Interpretacja zapasu modułu i fazy na charakterystykach częstotliwościowych Bodego (przypadek układu stabilnego).

Charakterystyki Bodego można wykreślić w Matlabie komenda `bode(sys)`. Przykładowe użycie tej funkcji pokazują poniższe linie programu

```
L=[19 10];
M=[3 2 1 1];
sys=tf(L,M)
bode(sys), grid
```

W wyniku otrzymuje się charakterystyki logarytmiczne Bodego jak na rys. 5.8. W tym przypadku układ jest niestabilny, gdyż charakterystyka amplitudowa przyjmuje wartość większą od 1 (w skali dB jest to wartość dodatnia równa 19dB) dla fazy -180° ; zapas fazy jest natomiast równy 2.8° .



Rys. 5.8 Charakterystyki Bodego dla przykładu (przypadek niestabilny)

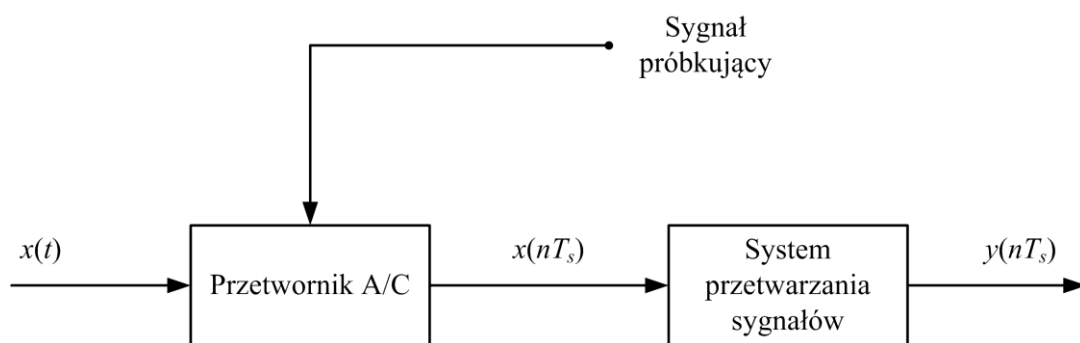
6. OPIS DYNAMICZNY UKŁADÓW DYSKRETYCH (Description of discrete dynamic systems)

6.1 Wprowadzenie

Układ dyskretny zwany również impulsowym jest układem fizycznym, w którym sygnały wejściowe (sterujące) i wyjściowe (sterowane) mogą zmieniać swoje wartości tylko w pewnych chwilach czasu zwanych chwilami próbkowania.

Dyskretyzacja (próbkowanie, impulsowanie) sprowadza się do pomiaru wartości sygnałów ciągłych w kolejnych, izolowanych chwilach czasowych, zwykle ze stałym okresem $T=T_s$. Sygnał dyskretny opisuje model fizyczny systemu, który jest określony tylko w dyskretnych chwilach. W odróżnieniu od sygnału ciągłego, sygnał dyskretny nie jest funkcją zdefiniowaną dla ciągłego przedziału argumentów, lecz ciągiem liczbowym zawierającym próbki pomiarowe zmierzone w dyskretnych chwilach $t_n = nT_s$, gdzie T_s jest okresem próbkowania a n numerem kolejnej próbki. Wielkości dyskretny sygnału będą oznaczane w postaci $x(nT_s)$ lub w skrócie $x(n)$. Poszczególne próbki sygnału dyskretnego mogą przyjmować wartości z nieograniczonego lub ograniczonego zbioru.

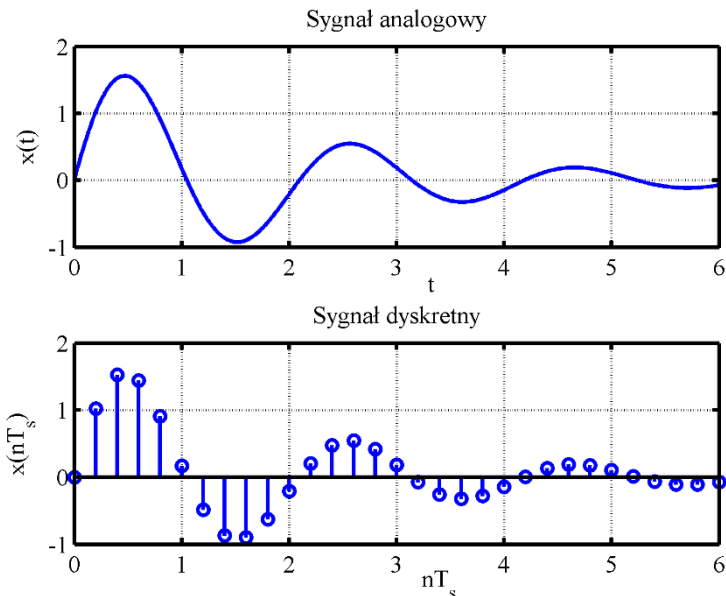
Przetworzenie sygnału ciągłego $x(t)$ w dyskretny $x(nT_s)$ odbywa się w praktyce w przetworniku analogowo-cyfrowym (A/C). Schemat przetwarzania wielkości ciągłej w dyskretną sterowany sygnałem próbkującym o okresie próbkowania $T=T_s$ pokazany jest na rys. 6.1. Sygnał dyskretny $x(nT_s)$ podlega następnie przetwarzaniu cyfrowemu do sygnału $y(nT_s)$ dla osiągnięcia zamierzonych przez użytkownika celów.



Rys. 6.1 Ogólny schemat przetwarzania sygnału analogowego w dyskretny

Na rys. 6.2 przedstawiono przykład sygnału analogowego (ciągłego) opisanego funkcją $x(t) = 2e^{-0.5t} \sin(3t)$ oraz odpowiadającego mu sygnału dyskretnego powstałego poprzez

dyskretyzację z krokiem $T_s=0.2$. Wartości obu sygnałów w chwilach dyskretyzacji są sobie równe. Nie mniej jednak wartości sygnału dyskretnego nie są znane poza chwilami dyskretyzacji, natomiast sygnał czasu ciągłego przyjmuje konkretne wartości w dowolnej chwili.



Rys. 6.2. Przykład sygnału o reprezentacji ciągłej i dyskretniej

6.2 Równania różnicowe systemu

W ogólnym przypadku układów nieliniowych stacjonarnych opis stanowy normalny składa się z wektorowego równania stanu i równania wyjścia, które można zapisać następująco

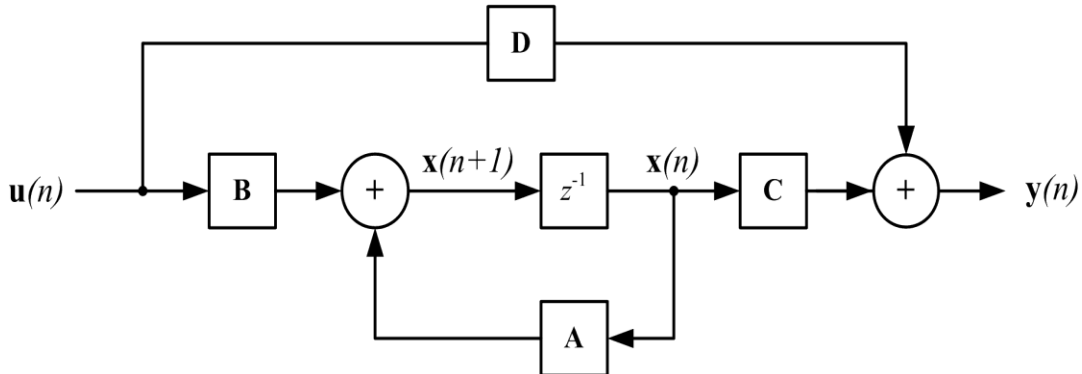
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n)) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Zmienne $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{u}(n)$ są skróconymi oznaczeniami wielkości $\mathbf{x}(nT)$ oraz $\mathbf{u}(nT)$. Zapis ten odpowiada równaniom dotyczącym modeli ciągłych. Przy pominięciu zjawisk nieliniowych w układzie lub dokonaniu linearyzacji otrzymuje się układ równań liniowych dyskretnych, zapisanych w następującej postaci macierzowej

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Równania te reprezentują równania różnicowe systemu dynamicznego i określają wartości zmiennych stanu (wektor \mathbf{x}) oraz zmiennych wyjściowych (wektor \mathbf{y}) w następnej iteracji w sposób rekurencyjny w oparciu o wartości zmiennych stanu i wymuszeń w obecnej iteracji.

Macierze stanu **A**, **B**, **C**, **D** reprezentują parametry wewnętrzne układu. Ogólny schemat układu odpowiadający równaniom (6.2) przedstawiony jest na rys. 6.3



Rys. 6.3. Schemat blokowy równań stanu odpowiadający równaniom (6.2)

Rozwiązaniem równania stanu (6.2) jest ciąg wartości w kolejnych chwilach próbkowania. Rozwiązanie to w postaci jawnej można również wyrazić wzorem

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{B} \mathbf{u}(j) \quad (6.3)$$

6.3 Transmitancja operatorowa

Ograniczając się do postaci skalarnej (względem jednego wybranego wymuszenia $u(n)$ i jednej odpowiedzi $y(n)$) można opis liniowego układu dyskretnego uprościć do jednego równania różnicowego wyższego rzędu operującego jedynie wielkościami wejściowymi i wyjściowymi w różnych chwilach czasowych (eliminacja zmiennych stanu)

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M) - a_1 y(n-1) - \dots - a_N y(n-N) \quad (6.4)$$

Wprowadzając operator opóźnienia jednostkowego z^{-1} (zapis $z^{-1}x$ odpowiada w dziedzinie czasu $x(n-1)$) można równania powyższe zapisać przy pomocy tego operatora w postaci

$$Y(z) = U(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) - Y(z)(a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) \quad (6.5)$$

Zakładając że badany układ jest przyczynowy i niezmienniczy względem przesunięcia, na podstawie równania (6.5) można analogicznie do układu ciągłego zdefiniować transmitancję operatorową jako stosunek odpowiedzi $Y(z)$ do wymuszenia $U(z)$ przyłożonego na wejście tego układu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (6.6)$$

Z równania (6.5) otrzymuje się ogólną postać tej transmitancji zwaną modelem IIR (Infinite Impulse Response)

$$H(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (6.7)$$

Nazwa związana jest z faktem, że odpowiedź impulsowa takiego układu przyjmuje w ogólności wartości niezerowe dla czasu dążącego do nieskończoności. Transmitancja operatorowa jest wyrażona w postaci wymiernej jako iloraz wielomianu licznika $L(z)$ i mianownika $M(z)$. Standardowa postać tej transmitancji operuje wykładnikami ujemnymi operatora z (odpowiadającymi odpowiedniemu opóźnieniu czasowemu).

W dziedzinie czasu dyskretnego wyróżnia się również inną postać transmitancji operatorowej zwaną FIR (Finite Impulse Response), dla której czas trwania odpowiedzi impulsowej jest skończony

$$H(z) = L(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} \quad (6.8)$$

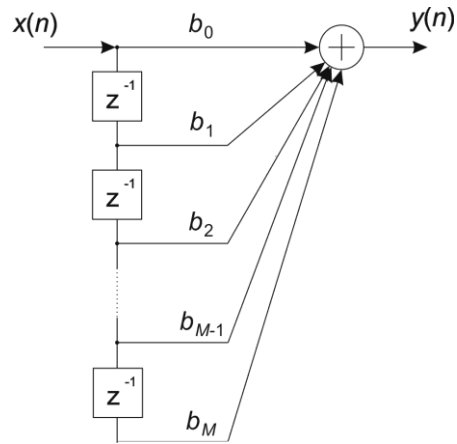
Każdej z tych transmitancji można przypisać odpowiednią strukturę układu przetwarzania sygnałów. W przypadku układu FIR z definicji transmitancji wynika

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z) \quad (6.9)$$

Na podstawie własności opóźnienia czasowego ciągu można temu wyrażeniu przypisać opis w dziedzinie czasu

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \quad (6.10)$$

Struktura układu realizującego powyższą operację przedstawiona jest na rys. 6.4. Elementami tego układu są: bloki opóźnienia jednostkowego opisane funkcją z^{-1} , bloki wzmacnień opisane liczbami rzeczywistymi b_i ($i = 0, 1, \dots, M$) oraz sumator dokonujący sumowania sygnałów opóźnionych [9,22].



Rys. 6.4. Struktura układu FIR

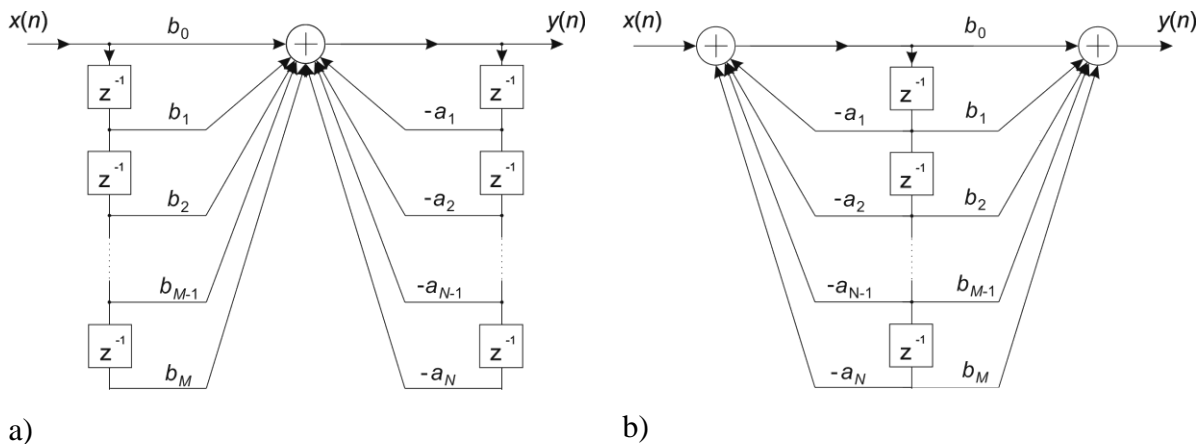
W przypadku układu IIR można utworzyć strukturę dyskretną w podobny sposób. Z definicji transmitancji wynika, że

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z) \quad (6.11)$$

Transformując powyższy opis w dziedzinę czasu dyskretnego otrzymuje się

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - (a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N)) \quad (6.12)$$

Równaniu temu można przypisać strukturę układową przedstawioną na rys. 6.5 [9,22].



Rys. 6.5. Struktura układu IIR: a) niekanoniczna, b) kanoniczna

Wyróżnia się dwie struktury układu NOI: niekanoniczną pod względem liczby użytych członów opóźniających (rys. 6.5a) oraz kanoniczną (rys. 6.5b) powstałą przez prostą zamianę kolejności obu podukładów realizujących część związaną z wielomianem licznika i mianownika. W

strukturze kanonicznej liczba członów opóźniających jest równa największemu stopniowi wielomianu licznika lub mianownika (na rysunku założono $N \geq M$).

6.4 Transformacje układu analogowego w dyskretny

Model ciągły układu fizycznego zapisany w postaci równań różniczkowych $dx/dt = f(x)$ można przekształcić w model dyskretny opisywany równaniami różnicowymi. Proces ten, zwany dyskretyzacją, powinien być tak przeprowadzony, aby dostatecznie dobrze aproksymował właściwości dynamiczne układu fizycznego. Oczywiście jest, że im mniejszy okres dyskretyzacji, tym dokładniejszy będzie model dyskretny, ale jednocześnie większy nakład obliczeń niezbędnych do wyznaczenia odpowiedzi czasowej układu.

Przejście z opisu różniczkowego na różnicowy jest możliwe bezpośrednio w dziedzinie czasu przy zastosowaniu przybliżonych wzorów uzależniających pochodną od różnic skończonych bądź w dziedzinie operatorowej Z . W dziedzinie czasu stosowane są różne wzory przybliżone. Przy założeniu, że przybliżenie dotyczy pochodnej zmiennej x względem czasu dla chwili czasowej $t_n = nT$, to jest $x(t_n) = x(n)$ definiuje się wzory aproksymacyjne Eulera

- **metoda Eulera w przód** (ekstrapolacyjna)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(n+1) - x(n)}{T} \quad (6.13)$$

- **metoda Eulera w tył** (interpolacyjna)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(n) - x(n-1)}{T} \quad (6.14)$$

przy czym metoda ekstrapolacyjna przy zbyt dużej wartości okresu próbkowania T może prowadzić do rozwiązania niestabilnego.

Najbardziej uniwersalną spośród metod pierwszego rzędu jest metoda całkowania trapezów, zgodnie z którą

$$x_n = x_{n-1} + \frac{T}{2} \left[\frac{dx_n}{dt} + \frac{dx_{n-1}}{dt} \right]$$

Jest ona podstawą **metody biliniowej** stosowanej w dziedzinie operatorowej opisu uzależniającej operator s od operatora opóźnienia jednostkowego z^{-1} . Zgodnie z nią

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Wzór ten pozwala na bezpośrednie przejście z transmitancji $H(s)$ na transmitancję operatorową $H(z)$ systemu dyskretnego.

7. STABILNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETYCH (Stability of discrete time systems)

7.1 Transformacja Z

7.1.1 Definicja przekształcenia Z

W analizie układów czasu dyskretnego ważną rolę odgrywa przekształcenie Z [15,22,34], stanowiące odpowiednik transformacji Laplace'a dla układów czasu ciągłego³. Niech $x(n)$ oznacza sygnał czasu dyskretnego rozpatrywany dla $n \geq 0$. Można mu przyporządkować funkcję $X(z)$ zmiennej zespolonej $z = Re^{j\theta}$ w następujący sposób

$$X(z) = x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (7.1)$$

Biorąc pod uwagę, że $x(n)$ stanowi ciąg próbek o równomiernym próbkowaniu sygnału analogowego, operator z^{-1} jest interpretowany jako opóźnienie jednostkowe o okres próbkowania T . Wielkość z^{-k} jest więc operatorem opóźnienia o k okresów próbkowania. Formalnie zdefiniujemy jednostronne⁴ przekształcenie Z sygnału dyskretnego $x(n)$ w postaci

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (7.2)$$

Wzór powyższy określa transformatę ciągu czasowego tylko wtedy, gdy istnieją wartości zmiennej zespolonej z dla których szereg (7.2) jest zbieżny. Zbiór takich wartości zmiennej z nazywany jest **obszarem zbieżności** transformaty [34].

Obliczmy przykładowo transformatę Z sygnału $x(n) = a^n$. Zgodnie z definicją przekształcenia Z mamy

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Przy założeniu $|az^{-1}| < 1$ powyższy ciąg geometryczny jest zbieżny, a jego suma zgodnie ze

wzorem $S_n = \frac{a_0}{1-q}$ (a_0 – pierwszy wyraz ciągu, q – iloraz) jest równa

$$X(z) = Z(a^n) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Obszarem zbieżności transformaty jest zbiór punktów z spełniających warunek $|z| > |a|$, to znaczy punktów płaszczyzny zespolonej położonych na zewnątrz koła promieniu $r = |a|$. Zauważmy, że

³ Przekształcenie to nosi również nazwę transformacji Laurenta

⁴ Istnieje również dwustronne przekształcenie Z w którym sumowanie przebiega od $-\infty$ do ∞ .

w szczególności wzór ten określa również transformatę Z dyskretnego skoku jednostkowego $1(n)$, będącego szczególnym przypadkiem sygnału wykładniczego $x(n)=a^n$ dla $a=1$. Podstawiając wartość $a=1$ do powyższego wzoru otrzymuje się

$$Z(1(n)) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

W tabeli 7.1 przedstawiono transformaty Z dla wybranych ciągów liczbowych, najczęściej spotykanych w praktyce inżynierskiej.

Tabela 7.1. Transformaty Z wybranych ciągów liczbowych

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$1(n)$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
$\sin(\omega T_s n)$	$\frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$
$\cos(\omega T_s n)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_s))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$
$e^{-\alpha T_s n} \sin(\omega T_s n)$	$\frac{ze^{-\alpha T_s} \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T_s} \cos(\omega T_s) + e^{-2\alpha T_s}}$
$e^{-\alpha T_s n} \cos(\omega T_s n)$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T_s} \cos(\omega T_s))}{z^2 - 2ze^{-\alpha T_s} \cos(\omega T_s) + e^{-2\alpha T_s}}$

7.1.2 Własności przekształcenia Z

Transformata Z ma własności matematyczne, które znajdują szerokie zastosowanie w analizie układów dyskretnych

- Liniowość

$$Z(ax_1(n) + bx_2(n)) = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (7.3)$$

- Mnożenie przez ciąg wykładniczy a^n

$$Z(a^n x(n)) = X(a^{-1}z) \quad (7.4)$$

- Opóźnienie czasowe ciągu

Przy założeniu ciągu przyczynowego ($x(n)=0$ dla $n<0$)

$$Z(x(n-k)) = z^{-k} X(z) \quad (7.5)$$

Przy założeniu ciągu nieprzyczynowego, w którym wartości $x(n)$ mogą przyjmować wartości niezerowe dla $n<0$)

$$Z(x(n-k)) = z^{-k} X(z) + \sum_{i=1}^k x(-i)z^{-k+i} \quad (7.6)$$

- Splot w dziedzinie czasu

Splot dyskretny w dziedzinie czasu definiowany jest w postaci

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \quad (7.7)$$

Transformata splotu jest określona w postaci zwykłego iloczynu transformat funkcji tworzących splot

$$Z(x_1(n) * x_2(n)) = X_1(z)X_2(z) \quad (7.8)$$

- Wartość ciągu $x(n)$ w nieskończoności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (7.9)$$

7.1.3. Przekształcenie odwrotne Z

Przekształcenie Z jest operacją odwracalną. Z definicji jest ono określone następującą zależnością [34]

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (7.10)$$

Całkowanie odbywa się wzdłuż krzywej zamkniętej C obieganej przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i zawartej całkowicie w obszarze zbieżności transformaty $X(z)$. Bezpośrednie korzystanie ze wzoru (7.10) jest bardzo trudne, gdyż w większości obliczeń inżynierskich wymaga obliczenia całki z funkcji złożonej ($X(z)$ jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej z). Z tego powodu w praktyce korzysta się z wielu innych metod, z których najczęściej używaną jest metoda residuów.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że funkcja operatorowa $X(z)$ zmiennej z dana jest w postaci wymiernej z potęgami dodatnimi opisanej wzorem o stopniu licznika nie przekraczającym stopnia mianownika $M \leq N$

$$X(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (7.11)$$

Funkcja ta posiada bieguny i zera, które mogą być skończone bądź nieskończone, pojedyncze lub wielokrotne, rzeczywiste bądź zespolone.

Najbardziej uniwersalną metodą wyznaczenia transformaty odwrotnej jest **twierdzenie o residuach**. Zgodnie z tym twierdzeniem transformatę odwrotną $x(n)$ można wyznaczyć korzystając ze wzoru

$$x(n) = \sum_k \operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=z_k} \quad (7.12)$$

Obliczanie residuów odbywa się dla wszystkich biegunów z_k ($k=1, 2, \dots, N$) a wynik podlega sumowaniu. Funkcję residuum wyznacza się według następujących wzorów

- W przypadku bieguna z_k pojedynczego

$$\operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=z_k} = \lim_{z \rightarrow z_k} [X(z)(z - z_k)z^{n-1}] \quad (7.13)$$

- W przypadku bieguna l -krotnego z_k

$$\operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=z_k} = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [X(z)(z - z_k)^l z^{n-1}] \quad (7.14)$$

Przykład 7.1

Procedurę wyznaczania transformaty odwrotnej Z zilustrujemy na przykładzie funkcji

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 2,5z + 1} = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 2)}$$

Funkcja ma dwa bieguny pojedyncze: $z_1=0,5$ oraz $z_2=2$. Transformata odwrotna tej funkcji jest sumą residuów obliczonych w obu biegunach. Stąd

$$x(n) = \operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=0,5} + \operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=2} = \frac{z^n}{(z-2)}_{z=0,5} + \frac{z^n}{(z-0,5)}_{z=2} = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} 2^n$$

Otrzymana w wyniku funkcja czasowa $x(n)$ zawiera dwa składniki zmienne w czasie dyskretnym reprezentowanym przez n . Pierwszy związany z biegunem $z_1=0,5$ położonym wewnątrz koła jednostkowego zanika do zera przy $n \rightarrow \infty$, natomiast drugi związany z biegunem $z_2=2$,

położonym na zewnątrz koła jednostkowego narasta do nieskończoności przy $n \rightarrow \infty$. W efekcie szereg $x(n)$ jest rozbieżny.

Przykład 7.2

Drugi przykład dotyczy bieguna dwukrotnego. Funkcja $X(z)$ dana jest w postaci

$$X(z) = \frac{z}{(z-0,5)^2}$$

Wobec dwukrotnej wartości bieguna $z_1=0,5$ transformata odwrotna Z przyjmie postać

$$x(n) = \operatorname{res}(X(z)z^{n-1})_{z=0,5} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} [X(z)(z-0,5)^2 z^{n-1}] = \frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1} = 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

7.2 Charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego

Z transmitancji operatorowej $H(z)$ zdefiniowanej w rozdziale poprzednim można w prosty sposób określić charakterystyki częstotliwościowe układu. Dla układu dyskretnego charakterystyka częstotliwościowa odpowiada przemieszczaniu się częstotliwości po okręgu jednostkowym, czyli dla $z = e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T)$. Oznacza to, że dla układu dyskretnego mamy

$$H(\omega) = H(z = e^{j\omega T}) \quad (7.15)$$

Biorąc pod uwagę powyższą zależność jest oczywiste, że charakterystyka częstotliwościowa odpowiada reprezentacji Fouriera ciągu dyskretnego. Wielkość ωT oznacza miarę kątową θ , która w charakterystykach częstotliwościowych nosi nazwę pulsacji unormowanej $\theta = \omega T$, gdzie T jest okresem próbkowania $T=T_s$. Moduł charakterystyki $|H(\omega)|$ w funkcji częstotliwości nazywany jest **charakterystyką amplitudową** a zależność fazy $\arg(H(\omega))$ od częstotliwości – **charakterystyką fazową**. Podobnie jak dla czasu ciągłego można zdefiniować również logarytmiczną charakterystykę amplitudową jako $20 \log_{10} |H(\omega)|$.

W odróżnieniu od układów analogowych charakterystyki częstotliwościowe charakteryzują się okresowością 2π , wynikającą z okresu funkcji $e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T)$. Obliczenia można zredukować do zakresu $0 \leq \omega T \leq \pi$ ze względu na symetrię funkcji wykładniczej $e^{j\omega T}$.

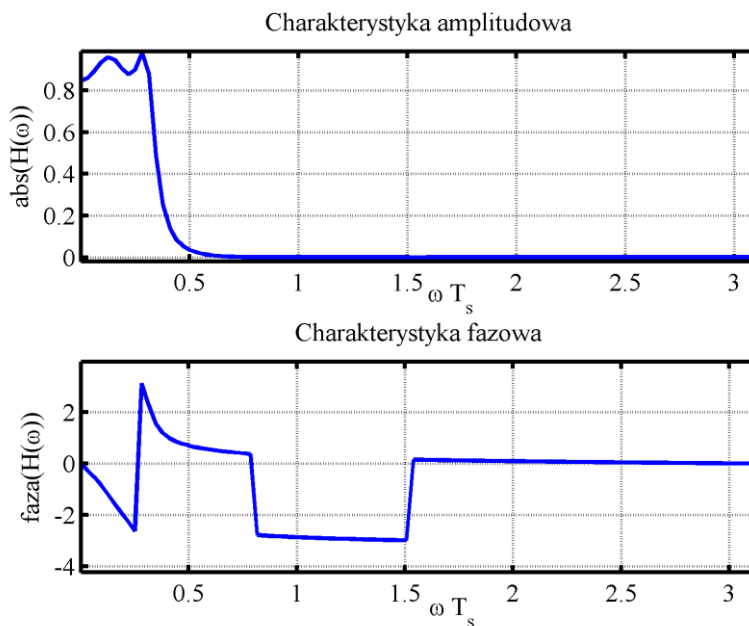
W Matlabie istnieje funkcja *freqz* pozwalająca tablicować wartości charakterystyki częstotliwościowej. Standardowo obliczenia wykonywane są w zakresie $0 \leq \omega T_s \leq \pi$.

Przykład 7.3

Poniższe linie programu w Matlabie pokazują zastosowanie tej funkcji w tablicowaniu wartości charakterystyki częstotliwościowej układu NOI o transmitancji danej w postaci wielomianu licznika L i mianownika M. Charakterystyka częstotliwościowa (amplitudowa i fazowa) określona jest dla pulsacji unormowanej zmieniającej się od 0 do π . Liczba punktów częstotliwościowych rozmieszczonych równomiernie w tym zakresie została w programie ustalona na 100.

```
% Charakterystyki częstotliwościowe układu NOI
L=[0.0019 -0.0028 0.0040 -0.0028 0.0019];
M=[1.0000 -3.6070 4.9796 -3.1126 0.7426];
[H,w]=freqz(L,M,100) % 100 punktów charakterystyki częstotliwościowej
subplot(2,1,1), plot(w,abs(H)), grid, title('Charakterystyka amplitudowa')
xlabel('\omega T_s'), ylabel('abs(H(\omega))')
subplot(2,1,2), plot(w,atan2(imag(H),real(H))), grid, title('Charakterystyka fazowa')
xlabel('\omega T_s'), ylabel('faza(H(\omega))')
```

Na rys. 6.7 zilustrowano otrzymane charakterystyki amplitudową i fazową układu NOI.



Rys. 7.1. Charakterystyki amplitudowa i fazowa układu NOI z przykładu

7.3. Odpowiedzi czasowe układu dyskretnego

Podobnie jak w systemach czasu ciągłego można na podstawie transmitancji operatorowej określić przebieg sygnału wyjściowego w czasie. Własności układu dyskretnego w pełni charakteryzuje odpowiedź impulsowa, czyli sygnał wyjściowy generowany przez wymuszenie w postaci sygnału impulsowego $\delta(n)$. Biorąc pod uwagę, że $Z(\delta(n))=1$ otrzymuje się odpowiedź impulsową w dziedzinie z w postaci $Y(z)=H(z)$. Stąd otrzymuje się

$$y(n) = Z^{-1}[H(z)] = h(n) \quad (7.16)$$

Z tego powodu odpowiedź impulsowa będzie dalej oznaczana jako $h(n)$, a transmitancję operatorową $H(z)$ określa się również jako transformatę Z odpowiedzi impulsowej układu.

$$H(z) = Z[h(n)] \quad (7.17)$$

W Matlabie istnieje funkcja *dimpulse* pozwalająca na wyznaczenie odpowiedzi impulsowej na podstawie zadanej postaci transmitancji.

Dla układów dyskretnych definiuje się również odpowiedź skokową, jako odpowiedź układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego dyskretnego. Jest ona równa transformacie odwrotnej Z iloczynu transmitancji operatorowej i transformaty Z funkcji $1(n)$, czyli

$$y(n) = Z^{-1}\left[H(z)\frac{z}{z-1}\right] \quad (7.18)$$

W Matlabie odpowiedź tę wyznacza funkcja *dstep*, której argumentami są współczynniki licznika i mianownika transmitancji $H(z)$.

Odpowiedź układu dyskretnego na dowolne wymuszenie $x(n)$ można obliczyć wykorzystując transformację odwrotną Z funkcji $Y(z)$. Z definicji transmitancji wynika, że

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (7.19)$$

Stąd zgodnie z własnościami transformaty Z odpowiedź układu dyskretnego na dowolne wymuszenie określa zależność splotowa

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (7.21)$$

W Matlabie operacja ta jest dostępna w postaci funkcji *filter*, której wywołanie wymaga podania wielomianu licznika transmitancji, wielomianu mianownika oraz ciągu liczb stanowiących wymuszenie układu.

7.4. Stabilność układów dyskretnych

Jednym z najważniejszych warunków użyteczności układu dyskretnego jest jego stabilność, czyli ograniczenie odpowiedzi układu $y(n)$ przy ograniczonych wartościach wymuszenia $x(n)$. Ze wzoru $y(n) = h(n) * x(n)$ określającego odpowiedź układu na dowolne wymuszenie wynika, że przy ograniczonym wymuszeniu warunkiem stabilności jest ograniczenie odpowiedzi impulsowej $h(n)$ dla dowolnej chwili czasowej. Układ jest niestabilny, jeśli potrafimy znaleźć dla niego taki ograniczony sygnał wejściowy, który spowoduje wygenerowanie na wyjściu nieograniczonego, (co do amplitudy) sygnału wyjściowego.

Biorąc pod uwagę, że odpowiedź impulsowa jest transformatą odwrotną Z transmitancji operatorowej, stabilność układu zależy od położenia biegunów. Zauważmy, że zawsze można dokonać rozkładu transmitancji na sumę ułamków prostych. Przy biegunach jednokrotnych jest to postać szczególnie prosta

$$H(z) = \sum_k \frac{A_k z}{z - a_k} = \sum_k \frac{A_k}{1 - a_k z^{-1}} \quad (7.20)$$

której odpowiada transformata odwrotna w postaci

$$h(n) = \sum_k A_k a_k^n \quad (7.21)$$

W przypadku wystąpienia bieguna l -krotnego o wartości a_k w rozwinięciu transmitancji pojawi się dodatkowo czynnik $\frac{A_k z}{(z - a_k)^l}$ odpowiadający składnikowi czasowemu o postaci

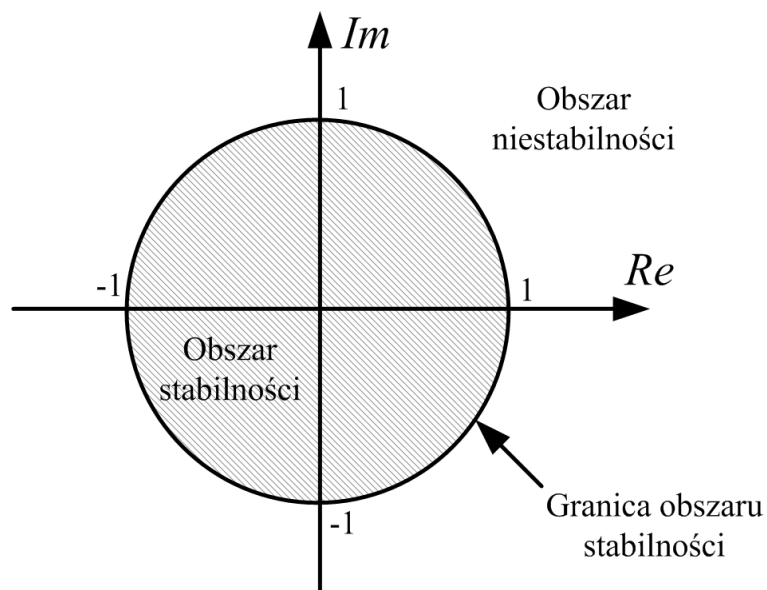
$$h_k(n) = A_k \frac{n(n-1) \cdots (n-l+2)}{(l-1)!} a_k^{n-l+1} \quad (7.22)$$

Z powyższych zależności wynika, że odpowiedź impulsowa zależy bezpośrednio od położenia biegunów a_k . Zauważmy, że obliczaniu transformaty odwrotnej Z towarzyszy zawsze czynnik a_k^n a w przypadku biegunów l -krotnych istnieje również czynnik $n^{l-1} a_k^n$. Dla czasu dyskretnego (reprezentowanego przez n) dążącego do nieskończoności ograniczenie wartości odpowiedzi impulsowej jest ściśle związane z czynnikami powiązаныmi z położeniem biegunów.

Układ dyskretny jest **stabilny asymptotycznie** (odpowiedź impulsowa dąży do zera) gdy wszystkie bieguny transmitancji mieszczą się wewnątrz koła jednostkowego, to znaczy $|z| < 1$. Jeśli choć jeden biegun położony jest na zewnątrz koła jednostkowego układ jest niestabilny.

W przypadku istnienia biegunów wielokrotnych położonych na okręgu jednostkowym stabilność zależy również od ich krotności. Z zależności (6.29) wynika bezpośrednio, że przy biegunach jednokrotnych układ jest **stabilny, choć nieasymptotycznie** (odpowiedź impulsowa jest ograniczona co do wartości, choć niezerowa). Przy biegunach wielokrotnych położonych na okręgu jednostkowym odpowiedź impulsowa jest określona zależnością (7.22), która wskazuje, że wprawdzie czynnik a_k^n przyjmuje ograniczone wartości, ale towarzyszący mu czynnik n^{l-1} dąży do nieskończoności, co powoduje, że układ jest niestabilny.

Na rys. 7.2 zilustrowano obszary stabilności i niestabilności układu dyskretnego. Obszar wewnątrz koła jednostkowego oznacza lokalizację biegunów, zapewniającą stabilność asymptotyczną układu. Obszar na zewnątrz koła jednostkowego oznacza brak stabilności układu. Granicą między tymi obszarami jest okrąg jednostkowy. Stabilność układu przy położeniu biegunów na okręgu jednostkowym zależy od ich krotności. Dla biegunów jednokrotnych układ jest stabilny, choć nieasymptotycznie. W przypadku biegunów wielokrotnych układ staje się niestabilny.



Rys. 7.2. Ilustracja obszarów stabilności i niestabilności układu dyskretnego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej

Zasadniczą różnicą między strukturą FIR i IIR jest występowanie toru sprzężenia zwrotnego w układzie IIR, związane z mianownikiem $M(z)$ transmitancji operatorowej. Układ FIR jest zawsze

stabilny, gdyż nie posiadając mianownika nie posiada również biegunów⁵. Układ IIR może być niestabilny, a jego stabilność zależy od położenia biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

7.5 Kryteria algebraiczne stabilności układów dyskretnych

Kryteria stabilności pozwalają rozstrzygnąć zagadnienie stabilności układów dyskretnych bez konieczności wyznaczania biegunów układu (pierwiastków mianownika transmitancji operatorowej). Ograniczymy się tutaj do kryterium Hurwitza i Nyquista.

7.5.1 Kryterium Hurwitza

W tej metodzie wprowadza się funkcję zespoloną $w = \alpha + j\omega$ i zmienną zespoloną z wielomianu charakterystycznego zastępuje się wyrażeniem

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (7.23)$$

Funkcja ta odwzorowuje na płaszczyźnie zmiennej zespolonej obszar koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej. Zastępując w wielomianie charakterystycznym $M(z)=0$

$$M(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (7.24)$$

zmienną z poprzez wyrażenie (7.23) transformuje się warunek położenia biegunów układu dyskretnego wewnątrz koła jednostkowego w równoważny mu warunek położenia biegunów w lewej półpłaszczyźnie (warunek stabilności układów analogowych dla których określone jest kryterium Hurwitza). Transformacja taka nie zmienia rzędu układu a jedynie wartości współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej w . Oznaczmy wielomian licznika po takiej transformacji jako $N(w)$, przy czym

$$N(w) = b_N w^N + b_{N-1} w^{N-1} + \dots + b_1 w + b_0 \quad (7.25)$$

Kryterium stabilności Hurwitza

Wielomian $N(w)$ o postaci (7.25) jest wielomianem stabilnym, jeśli wszystkie współczynniki b_i istnieją i są większe od zera a wszystkie minory główne są dodatnie, tzn. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{N-1} > 0$.

Minory główne oblicza się według następujących wzorów:

⁵ W ogólnej interpretacji biegun reprezentuje taką wartość z , dla której wartość funkcji dąży do nieskończoności. Oznacza to, że filtr SOI można również zinterpretować jako układ posiadający M -krotny biegun w zerze, z definicji spełniający warunek stabilności.

Macierz Hurwitza:

$$H_N = \begin{bmatrix} b_{N-1} & b_N & 0 & 0 & \dots \\ b_{N-3} & b_{N-2} & b_{N-1} & b_N & \dots \\ b_{N-5} & b_{N-4} & b_{N-3} & b_{N-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Minory główne:

$$\Delta_1 = b_{N-1}, \quad (7.27)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{N-1} & b_N \\ b_{N-3} & b_{N-2} \end{vmatrix} \quad (7.28)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{N-1} & b_N & 0 \\ b_{N-3} & b_{N-2} & b_{N-1} \\ b_{N-5} & b_{N-4} & b_{N-3} \end{vmatrix} \quad (7.29)$$

$$\Delta_m = \det(H_m) \quad (7.30)$$

Podobnie jak w przypadku układów analogowych bezpośrednie zastosowanie twierdzenia Hurwitza wymaga obliczenia $m=N-1$ wyznaczników macierzy Hurwitza.

Przykład 7.4

Określić warunki przy spełnieniu których system dynamiczny o wielomianie charakterystycznym

$$M(z) = z^2 + k_1 z + k_0$$

będzie stabilny.

W pierwszej kolejności przekształcamy $M(z)$ w wielomian $N(w)$ względem zmiennej w .

Podstawienie zależności $z = \frac{w+1}{w-1}$ do wzoru na $M(z)$ pozwala określić wielomian licznika $N(w)$

w postaci

$$N(w) = (1 + k_1 + k_0)w^2 + (2 - 2k_0)w + (1 - k_1 + k_0)$$

Warunki Hurwitza sprowadzają się do układu równań

$$(1 + k_1 + k_0) > 0$$

$$(1 - k_0) > 0$$

$$(1 - k_1 + k_0) > 0$$

których rozwiązanie definiuje obszar stabilności układu dyskretnego.

7.5.2 Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista pozwala zbadać stabilność dyskretnego układu zamkniętego na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej $H_o(e^{j\theta})$ układu otwartego. Przyjmiemy transmitancję układu otwartego jako funkcję wymierną

$$H_o(z) = \frac{L_o(z)}{M_o(z)} \quad (7.31)$$

Transmitancja układu zamkniętego (ze wzmocnieniem jednostkowym w pętli sprzężenia) wyrażona wzorem $H(z) = H_o(z)/(1+H_o(z))$ ma wielomian charakterystyczny (mianownik) o postaci

$$M(z) = L_o(z) + M_o(z) \quad (7.32)$$

Twierdzenie Nyquista

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego (7.32) ma wszystkie pierwiastki na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z wewnątrz okręgu jednostkowego przy założeniu, że równanie charakterystyczne układu otwartego $M_o(z)$ ma m pierwiastków na zewnątrz okręgu jednostkowego (a pozostałe $n-m$ wewnątrz) wtedy i tylko wtedy gdy przyrost argumentu wyrażenia $(1 + H_o(e^{j\theta}))$ przy zmianie kąta θ od $-\pi$ do π wynosi $2m\pi$, co zapiszemy w postaci

$$\Delta \arg_{-\pi \leq \theta \leq \pi} [1 + H_o(e^{j\theta})] = 2m\pi \quad (7.33)$$

W przypadku szczególnym, gdy układ otwarty jest stabilny (wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu otwartego wewnątrz okręgu jednostkowego) mamy $m=0$. W takim przypadku wszystkie pierwiastki układu zamkniętego będą wewnątrz okręgu jednostkowego, jeśli przyrost argumentu wyrażenia $(1 + H_o(e^{j\theta}))$ przy zmianie kąta θ od $-\pi$ do π wynosi zero, czyli

$$\Delta \arg_{-\pi \leq \theta \leq \pi} [1 + H_o(e^{j\theta})] = 0 \quad (7.34)$$

Kryterium Nyquista

Liniowy układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym przy założeniu, że układ otwarty jest niestabilny i ma m pierwiastków na zewnątrz okręgu jednostkowego, jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $H_o(e^{j\theta})$ przy zmianie kąta θ od $-\pi$ do π obejmuje w kierunku dodatnim m razy punkt $(-1, j0)$.

W przypadku szczególnym, gdy układ otwarty jest stabilny (wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu otwartego wewnątrz okręgu jednostkowego) mamy $m=0$. W takim przypadku wszystkie pierwiastki układu zamkniętego będą wewnątrz okręgu jednostkowego (układ stabilny), gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $H_o(e^{j\theta})$ przy zmianie kąta θ od $-\pi$ do π nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

Biorąc pod uwagę, że charakterystyka amplitudowo-fazowa jest symetryczna względem osi poziomej można w badaniu ograniczyć się do wykreślenia charakterystyki dla kątów zmieniających się od 0 do π .

7.5.3 Implementacja kryterium Nyquista w Matlabie

Matlab ma funkcję *nyquist*, która tworzy automatycznie charakterystykę amplitudowo-fazową układu (identycznie wołana jak dla systemu analogowego). Jej wywołanie wymaga określenia systemu w postaci struktury *sys*. Przykładowe tworzenie tej struktury dla opisu transmitancyjnego i stanowego układu dyskretnego są jak niżej.

```
sys=tf(licznik, mianownik, fs)
```

```
sys=ss(A, B, C, D, fs)
```

gdzie f_s jest szybkością próbkowania (standardowa wartość równa 1).

Przykład 7.5

Jeśli $A=[1 \ 2; 3 \ 4]$, $B=[0; 1]$, $C=[1 \ 4]$, $D=1$, to wywołanie struktury w postaci

```
sys=ss(A,B,C,D,1)
```

tworzy następujący wynik:

```
sys =
a =
    x1 x2
    x1 1 2
    x2 3 4

b =
    u1
    x1 0
    x2 1

c =
    x1 x2
    y1 1 4

d =
    u1
```

y1 1

Przykład 7.6

Jeśli $L0=[1 \ 2]$, $M0=[1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5]$, to wywołanie struktury w postaci

```
sys=tf(L0,M0,1)
```

tworzy wynik

sys =

```
z + 2
```

```
z^3 + 0.3 z^2 + 0.4 z + 0.5
```

Sample time: 1 seconds

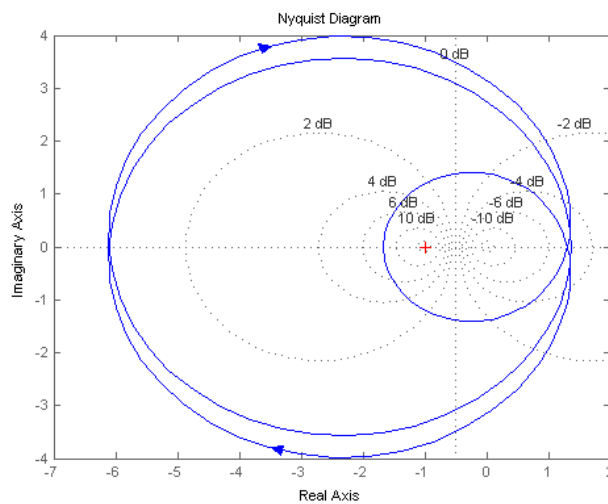
Discrete-time transfer function.

Najprostszy sposób wywołania funkcji *nyquist* dla systemu dyskretnego ma postać

```
nyquist(sys), grid
```

Przykład 7.7

Jej wywołanie dla systemu opisanego transmitancją układu otwartego $H_o(z)=L_o(z)/M_o(z)$, gdzie $L_o=[1 \ 2]$, $M_o=[1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5]$, daje wykres w postaci przedstawionej na rys. 7.3.



Rys. 7.3 Charakterystyka Nyquista dla stabilnego systemu otwartego o transmitancji $H_o(z)= L_o(z)/M_o(z)$. System zamknięty jest niestabilny.

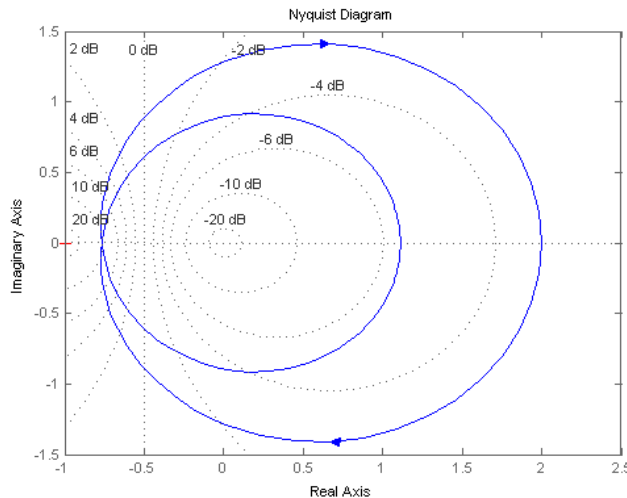
System otwarty był stabilny, gdyż pierwiastki mianownika systemu otwartego $M_o(z)=z^3+0.3z^2+0.4z+0.5$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego: $p_1=0.2081 + j0.8092$, $p_2=0.2081 - j0.8092$, $p_3=-0.7162$. System zamknięty jest niestabilny według kryterium Nyquista, gdyż charakterystyka amplitudowo-fazowa obejmuje punkt $(-1, j0)$. Potwierdzeniem niestabilności układu zamkniętego jest mianownik transmitancji układu zamkniętego $M(z)=L_o(z)+M_o(z)=z^3+0.3z^2+1.4z+2.5$ którego pierwiastki (bieguny układu) leżą poza okręgiem jednostkowym: $p_1= 0.3991 + j1.4551$, $p_2=0.3991 - j1.4551$, $p_3=-1.0982$.

Przykład 7.8

Jako przykład drugi rozpatrzmy transmitancję układu otwartego w postaci $H_o(z)= L_o(z)/M_o(z)$, gdzie $L_o(z)= 1$, $M_o(z)=z^2+0.2z-0.3$. Jest to układ stabilny, gdyż pierwiastki mianownika równe $p_1=-0.6568$, $p_2=0.4568$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Wywołanie komend w Matlabie

```
sys=tf(Lo,Mo,1)
nyquist(sys), grid
```

generuje charakterystykę Nyquista w postaci przedstawionej na rys. 7.4. Układ zamknięty jest stabilny, gdyż krzywa Nyquista nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.



Rys. 7.4 Charakterystyka Nyquista dla stabilnego systemu otwartego o transmitancji $H_o(z)= L_o(z)/M_o(z)$. System zamknięty jest również stabilny.

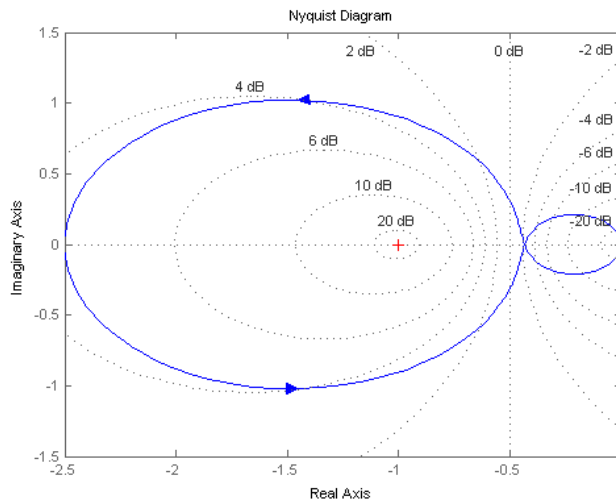
Potwierdzeniem stabilności systemu zamkniętego jest jego mianownik o postaci $M(z)=z^2+0.2z+0.7$, którego pierwiastki (bieguny układu) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego $p_1=-0.1000+j0.8307$, $p_2=-0.1000-j0.8307$.

Przykład 7.9

Jako przykład następny rozpatrzmy transmitancję układu otwartego w postaci $H_o(z)=L_o(z)/M_o(z)$, gdzie $L_o(z)=z+1$, $M_o(z)=z^2-0.5z-1.3$. Jest to układ niestabilny, gdyż nie wszystkie pierwiastki mianownika równe $p_1= 1.4173$, $p_2=-0.9173$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego (jeden biegun poza kołem). Wywołanie komend w Matlabie

```
sys=tf(Lo,Mo,1)
nyquist(sys), grid
```

generuje charakterystykę Nyquista w postaci przedstawionej na rys. 7.5. Układ zamknięty jest stabilny, gdyż krzywa Nyquista obejmuje jeden raz punkt $(-1, j0)$.



Rys. 7.4 Charakterystyka Nyquista dla niestabilnego systemu otwartego o transmitancji $H_o(z)=L_o(z)/M_o(z)$. System zamknięty jest stabilny.

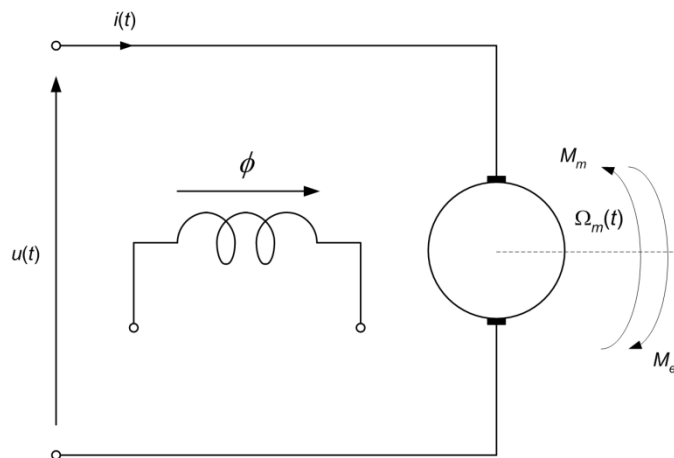
Potwierdzeniem stabilności systemu zamkniętego jest mianownik jego transmitancji o postaci $M(z)=z^2+0.5z-0.3$, którego pierwiastki (bieguny układu) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego $p_1=-0.8521$, $p_2=0.3521$.

8. MODELE DYNAMICZNE MASZYN ELEKTRYCZNYCH (Dynamic models of electrical machines)

Przykładami obiektów dynamicznych rozpatrzonych w wykładzie będą modele dynamiczne maszyny elektrycznej prądu stałego i maszyny indukcyjnej. Ograniczymy się do najprostszego modelu maszyny obcowzbudnej DC i trójfazowej maszyny indukcyjnej.

8.1. Maszyna obcowzbudna prądu stałego

Ogólny schemat ideowy maszyny obcowzbudnej prądu stałego przedstawiony jest na rys. 8.1.



Rys. 8.1 Schemat ideowy maszyny obcowzbudnej prądu stałego

Oznaczając przez $e(t)$ napięcie indukowane w uzwojeniu twornika, przez L_t i R_t odpowiednio indukcyjność i rezystancję obwodu twornika, a przez $u(t)$ oraz $i(t)$ napięcie zasilające twornik i prąd twornika, przy pominięciu spadku napięcia między szczotkami i komutatorem, równanie napięciowe dla obwodu twornika można napisać w postaci [58,73]

$$u(t) = R_t i(t) + L_t \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (8.1)$$

Oznaczmy przez ϕ strumień magnetyczny w szczelinie powietrznej maszyny. Przy pominięciu skutków reakcji twornika [58] można założyć, że jest on stały i równy strumieniowi wzbudzenia. W takich warunkach napięcie indukowane $e(t)$ można wyrazić wzorem

$$e(t) = C_e \phi \Omega_m(t) \quad (8.2)$$

gdzie C_e jest stałą, a $\Omega_m(t) = \frac{2\pi}{60}n$ jest prędkością kątową silnika wyrażoną w radianach na sekundę, przy czym n jest prędkością silnika wyrażoną w obrotach na minutę (obr/min). Moment elektromagnetyczny $M_e(t)$ wytwarzany przez silnik opisuje relacja

$$M_e(t) = C_m \phi i(t) \quad (8.3)$$

Przy założeniu obciążenia silnika momentem mechanicznym $M_m(t)$ przeciwdziałającym momentowi elektromagnetycznemu ruch odbywa się pod wpływem momentu wypadkowego ($M_e - M_m$). Biorąc pod uwagę równanie dynamiczne ciała znajdującego się w ruchu obrotowym równanie ruchu silnika może być przedstawione w postaci

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = M_e(t) - M_m(t) \quad (8.4)$$

gdzie J oznacza wypadkowy moment bezwładności na wale silnika. Po wstawieniu zależności (8.3) i (8.4) do równania ruchu i równania napięciowego twornika otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych, opisujących silnik

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R_t}{L_t}i - \frac{C_e \phi}{L_t} \Omega_m + \frac{1}{L_t}u \\ \frac{d\Omega_m}{dt} &= \frac{C_m \phi}{J}i - \frac{1}{J}M_m \end{aligned} \quad (8.5)$$

W opisie dynamiki silnika prądu stałego używa się zwykle dwu stałych czasowych: stałej elektromechanicznej $T_m = \frac{JR_t}{C_e C_m \phi^2}$ oraz stałej elektromagnetycznej $T_t = \frac{L_t}{R_t}$. Po wprowadzeniu tych stałych do równania (8.5) otrzymuje się następującą postać macierzową równania liniowego stanu

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\Omega_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_t} & -\frac{J}{T_m T_t C_m \phi} \\ \frac{R_t}{T_m C_e \phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_t T_t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ M_m \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

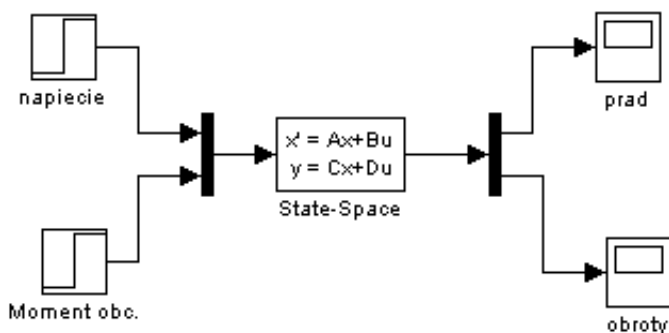
w którym zmiennymi stanu są prąd twornika i oraz prędkość kątowa Ω_m a sygnałem wymuszającym - napięcie zasilające u . Moment mechaniczny M_m we wzorze reprezentuje sobą czynnik zakłócający. Przy obciążeniu czynnym (np. wciągarka) moment M_m może być traktowany również jako drugi czynnik wymuszający ruch, stąd w równaniu tworzy on wspólnie z napięciem zasilającym wektor wymuszający \mathbf{u} . Sygnałem wyjściowym modelu silnika prądu

stałego może być prędkość kątowna Ω_m , prąd twornika i oraz moment elektromagnetyczny M_e . Biorąc pod uwagę zależność (8.3) i uwzględniając stałość strumienia, moment elektromagnetyczny jest proporcjonalny do prądu twornika. Przy takim założeniu wystarczy ograniczyć się w wyborze zmiennych wyjściowych do prędkości Ω_m oraz prądu i , przyjmując

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i \\ \Omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ M_m \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Jeśli przyjmiemy że strumień magnetyczny ϕ w szczelinie silnika jest stały, podobnie, jak pozostałe parametry R_t , L_t i J , to równania stanu silnika przedstawiają sobą równania liniowe.

Na rys. 8.2 przedstawiono model dynamiczny maszyny prądu stałego w Simulinku przy obciążeniu aktywnym, co oznacza, że moment mechaniczny może nadawać ruch maszynie (przykładem takiego obciążenia może być wciągarka). Założono, że napięcie zasilające oraz moment obciążenia stanowią wektor wymuszający \mathbf{u} .



Rys. 8.2 Model dynamiczny maszyny prądu stałego

W badaniach symulacyjnych założono silnik obcowzbudny prądu stałego o mocy $P=22\text{kW}$, napięciu znamionowym zasilania $U_n=440\text{V}$, prądzie znamionowym $I_n=56,2\text{A}$, i prędkości znamionowej $n=1500\text{ obr/min}$ [58]. Wypadkowy moment bezwładności sprowadzony do wału silnika wynosi $J=2.7\text{kgm}^2$. Rezystancja uzwojenia twornika jest równa $R_t=0.465\Omega$, a stała czasowa $T_t=0.033\text{s}$.

Aby określić parametry modelu maszyny należy wyznaczyć znamionowe napięcie indukowane w tworniku badanego silnika $E_n=U_n-R_t I_n=413.87\text{V}$. Znamionowa prędkość kątowna

silnika jest równa $\Omega_{mn} = 1500 \frac{2\pi}{60} = 157 \text{ rad/s}$, stała $C_e\phi = \frac{E_n}{\Omega_{mn}} = 2,623 \text{Vs}$. Przyjmuje się, że

$C_e\phi = C_m\phi$ w jednostkach SI, stąd otrzymuje się $C_m\phi = 2,623 \text{Nm/A}$. Stała elektromechaniczna

silnika $T_m = \frac{JR_t}{(C_e\phi)(C_m\phi)} = 0,1829 \text{s}$ jest ponad pięciokrotnie większa niż stała

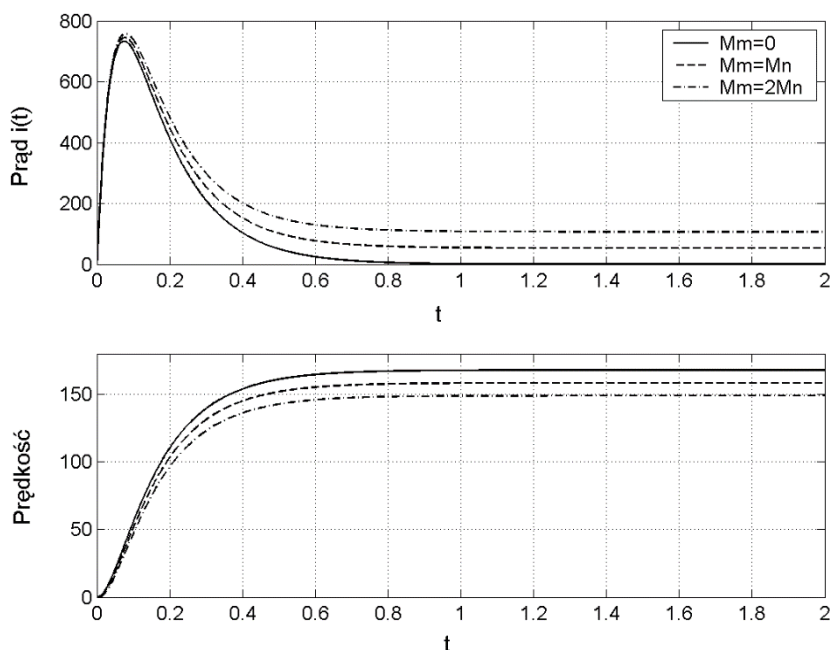
elektromagnetyczna $T_t = 0,033 \text{s}$. Moment znamionowy silnika wyznaczony jest ze wzoru

$M_n = \frac{P}{\Omega_{mn}} = 140,13 \text{Nm}$. Wstawiając wielkości wyznaczone wcześniej do wzoru (8.6), otrzymuje

się macierzowe równanie stanu silnika o macierzach **A** i **B** określonych następująco

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -30,3 & -170,74 \\ 0,97 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 65,168 & 0 \\ 0 & -0,37 \end{bmatrix}$$

Na rys. 8.3 przedstawiono przebieg prądu (rys. 8.3a) i prędkości kątowej (rys. 8.3b) podczas rozruchu przy różnym obciążeniu silnika ($M_m=0$, $M_m=M_n$ i $M_m=2M_n$).

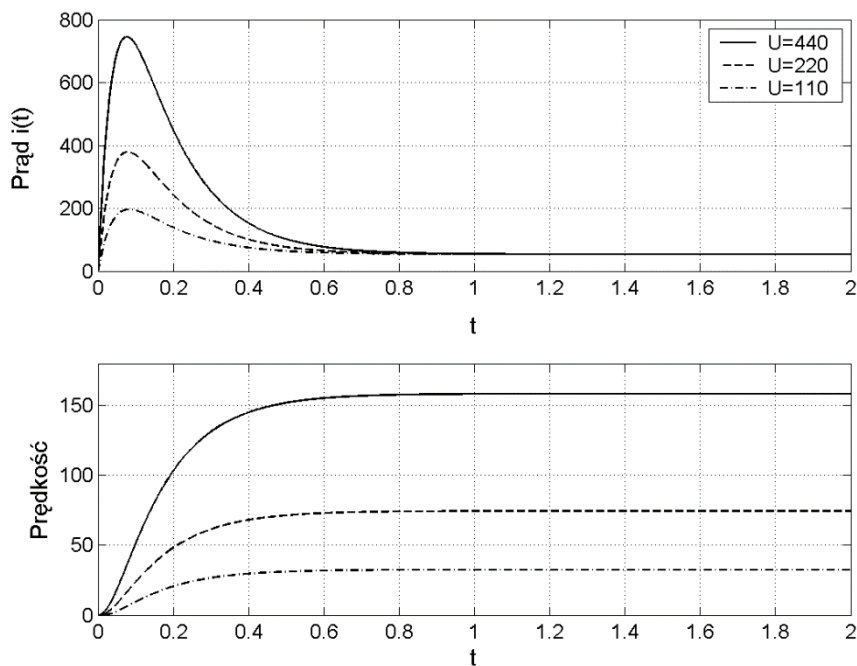


Rys. 8.3 Przebieg prędkości kątowej (a) oraz prądu silnika (b) podczas rozruchu przy różnym obciążeniu

Charakterystyczną cechą silnika prądu stałego jest stosunkowo niewielka wrażliwość wartości maksymalnej prądu twornika na obciążenie w czasie rozruchu jak również znaczna niezależność

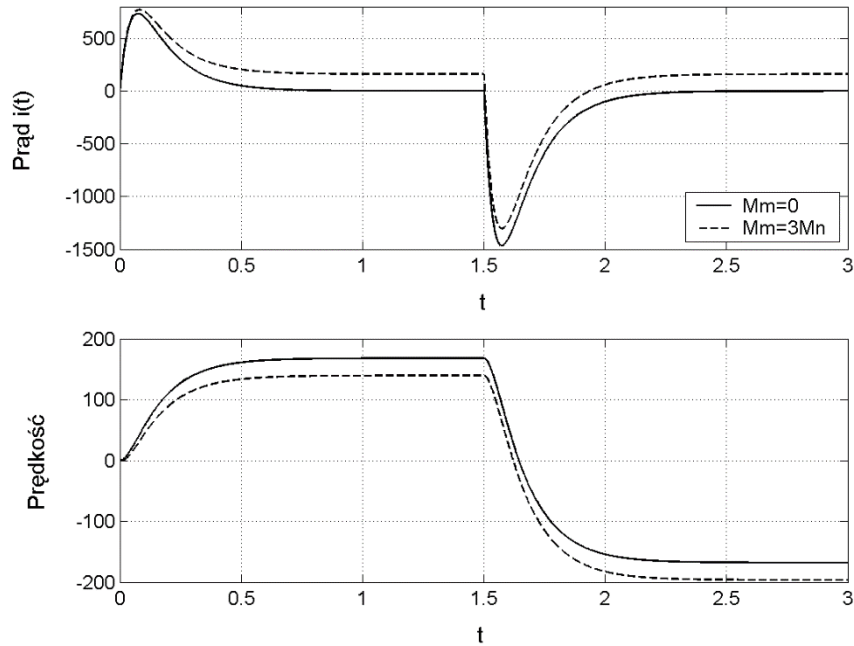
czasu rozruchu od obciążenia. W stanie ustalonym prąd twornika jest ściśle powiązany z momentem obciążającym M_m . Należy zwrócić uwagę, że przy bardzo dużym przeciążeniu silnika i obciążeniu aktywnym moment obciążający mógłby stać się momentem napędzającym i silnik zacząłby obracać się w przeciwnym kierunku, pracując jako hamownica. Obroty w kierunku przeciwnym ustaliłyby się wówczas na takim poziomie, aby prąd płynący w stanie ustalonym przez silnik wytwarzał moment hamujący równoważący moment aktywny obciążenia M_m .

Rys.8.4 przedstawia zmianę prędkości i prądu silnika przy zmianach napięcia zasilającego w obecności momentu obciążającego o wartości znamionowej. Należy zwrócić uwagę, że niezależnie od wartości napięcia zasilającego, prąd silnika w stanie ustalonym



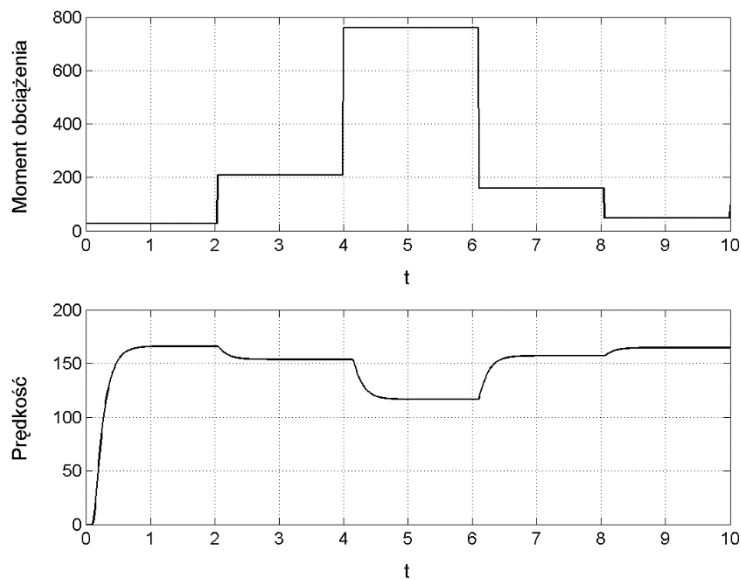
Rys. 8.4 Zmiany prędkości obrotowej i prądu silnika przy zmianach napięcia zasilającego i stałym momencie obciążenia

przyjmuje tę samą wartość, pozwalającą na wytworzenie momentu elektromagnetycznego równoważącego moment mechaniczny obciążenia. Prędkość ustalona silnika jest praktycznie liniowo zmienna z wartością napięcia zasilającego.



Rys. 8.5 Zmiany prędkości obrotowej i prądu silnika przy nawrocie dla dwu wartości momentu obciążenia

Szczególnie prosta jest symulacja nawrotu silnika prądu stałego. Wystarczy w tym celu zmienić polaryzację napięcia zasilającego. Na rys. 8.5 przedstawiono zmianę prędkości obrotowej silnika i prądu twornika przy zmianie polaryzacji napięcia zasilającego i dwu różnych momentach obciążenia ($M_m=0$ oraz $M_m=3M_n$).



Rys. 8.6 Zmiany prędkości obrotowej silnika przy wielokrotnych zmianach momentu obciążenia M_m

Nawrót nastąpił w chwili $t=1.5s$. O ile w stanie jałowym prędkości silnika w obu kierunkach są symetryczne, o tyle w warunkach obciążenia aktywnego występuje asymetria (moment obciążenia ma jeden zwrot i przy zmianie kierunku obrotów współpracuje z momentem napędowym silnika powodując zwiększenie prędkości).

Na rys. 8.6 przedstawiono zmiany prędkości obrotowej silnika przy znamionowym zasilaniu i wielokrotnych zmianach momentu obciążeniowego w zakresie wartości od zera do 780Nm (rys. 8.6a). Silnik charakteryzuje się dużą przeciążalnością (stabilne obroty przy dużym przeciążeniu).

8.2 Silnik indukcyjny

Model dynamiczny silnika indukcyjnego wyrażony jest w postaci układu równań różniczkowych przedstawiających związek między strumieniami magnetycznymi twornika i wirnika, prędkością obrotową i napięciem zasilającym. Mając na uwadze prostotę modelu przy jednocześnie stosunkowo wiernym odtworzeniu zjawisk zachodzących w silniku uzasadniane jest przyjęcie założeń upraszczających, co do silnika [58]. Są to: symetria uzwojeń trójfazowych stojana i wirnika, sinusoidalna zmienność przepływów uzwojeń wzdłuż szczeliny powietrznej, pominięcie wpływu histerezy, nasycenia, anizotropii i strat na prądy wirowe obwodu magnetycznego, pominięcie zjawiska wypierania prądu w przewodach uzwojeń wirnika (dotyczy silników klatkowych), założenie punktu pracy obwodu magnetycznego w części liniowej charakterystyki magnesowania, co w praktyce oznacza liniową indukcyjność stojana i wirnika przy stałych wartościach indukcyjności własnych i wzajemnych.

Oznaczając przez u_{si} , i_{si} , ψ_{si} ($i = 1, 2, 3$) odpowiednio napięcie zasilania, prąd stojana i strumienie magnetyczne skojarzone z kolejnymi fazami oraz przez R_s rezystancję stojana (przy symetrii uzwojeń zakłada się że rezystancja każdej fazy jest równa R_s), uzyskuje się opis poszczególnych uzwojeń stojana w postaci układu 3 równań różniczkowych o postaci

$$u_{si} = \frac{d\psi_{si}}{dt} + R_s i_{si} \quad (8.8)$$

dla każdej fazy $i=1, 2, 3$. Podobne zależności obowiązują dla wirnika, przy czym różnica w oznaczeniu dotyczy zamiany wskaźnika s przez wskaźnik r

$$u_{ri} = \frac{d\psi_{ri}}{dt} + R_r i_{ri} \quad (8.9)$$

Dla indukcyjnej maszyny klatkowej oraz dla maszyny pierścieniowej pracującej ze zwartym pierścieniem zachodzi: $u_{r1}=u_{r2}=u_{r3}=0$. Równania obwodu elektrycznego silnika uzupełnia się przez równanie ruchu obrotowego w postaci

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = M_e(t) - M_m(t) \quad (8.10)$$

w którym znaczenie poszczególnych wielkości jest identyczne jak dla silnika prądu stałego.

Symetryczne 3-fazowe uzwojenie stojana zasilone trójfazowym symetrycznym układem napięć sinusoidalnych, wytwarza w stanie ustalonym przepływ magnetyczny wirujący względem stojana (nieruchomego układu odniesienia) z synchroniczną prędkością kątową elektryczną Ω_s równą pulsacji zasilania stojana, $\omega_s = 2\pi f$, gdzie f oznacza częstotliwość napięcia zasilającego. Prędkość mechaniczna synchroniczna Ω_{ms} silnika zależy dodatkowo od liczby par biegunów uzwojenia stojana i wyraża się wzorem

$$\Omega_{ms} = \frac{\Omega_s}{p} = \frac{\omega_s}{p} \quad (8.11)$$

Wypadkowy przepływ magnetyczny stojana wytworzony przez uzwojenie 3-fazowe można scharakteryzować przy pomocy wektora przestrzennego prądu stojana wirującego w płaszczyźnie zmiennej zespolonej, prostopadłej do osi wału silnika. Początek układu współrzędnych tej płaszczyzny jest umieszczony w punkcie, przez który przechodzi oś wału silnika. Powyższy wektor przestrzenny prądu stojana można opisać wzorem

$$\mathbf{i}_s = \frac{2}{3} (i_{s1} + a i_{s2} + a^2 i_{s3}) \quad (8.12)$$

w którym a oznacza operator obrotu $a = e^{j2\pi/3}$. Analogiczne wielkości zdefiniować można dla prądów, napięć i strumieni zarówno stojana jak i wirnika.

Dodając do równania napięciowego fazy pierwszej równanie fazy drugiej pomnożone przez a i fazy trzeciej pomnożone przez a^2 , zamiast trzech równań fazowych stojana i wirnika otrzymuje się po jednym równaniu dla wektorów przestrzennych stojana i wirnika. Zapiszemy je w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt} \\ \mathbf{u}_r &= R_r \mathbf{i}_r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_r}{dt} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Wektory przestrzenne stojana są wyrażone w układzie współrzędnych, nieruchomym względem stojana. Wektory przestrzenne wirnika są wyrażone w układzie współrzędnych, związanym z wirnikiem, obróconym względem układu współrzędnych stojana o kąt elektryczny obrotu wirnika θ . Zachodzi przy tym

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = p\Omega_m \quad (8.14)$$

gdzie Ω oznacza elektryczną prędkość kątową wirnika a Ω_m - mechaniczną prędkość kątową wirnika.

Równania silnika indukcyjnego można związać z układem współrzędnych nieruchomym bądź wirującym z prędkością synchroniczną. Tę drugą metodę zademonstrujemy tutaj. Górnym indeksem k oznaczmy wektory przestrzenne stojana i wirnika związane z takim układem współrzędnych. Przy takim wyborze układu współrzędnych należy sprowadzić do niego zarówno równanie dotyczące stojana, jak i równanie dotyczące wirnika. Dokonuje się w związku z tym przekształcenia : $\mathbf{i}_s = \mathbf{i}_s^{(k)} e^{j\theta_k}$, $\mathbf{i}_r = \mathbf{i}_r^{(k)} e^{j(\theta_k - \theta)}$, $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s^{(k)} e^{j\theta_k}$, $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r^{(k)} e^{j(\theta_k - \theta)}$, $\boldsymbol{\psi}_s = \boldsymbol{\psi}_s^{(k)} e^{j\theta_k}$,

$\boldsymbol{\psi}_r = \boldsymbol{\psi}_r^{(k)} e^{j(\theta_k - \theta)}$. Biorąc pod uwagę że $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$, $\Omega_s = \omega_s = \frac{d\theta_k}{dt}$ z równań (8.13) otrzymuje się

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{(k)}}{dt} = -j\Omega_s \boldsymbol{\psi}_s^{(k)} - R_s \mathbf{i}_s^{(k)} + \mathbf{u}_s^{(k)} \quad (8.15)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_r^{(k)}}{dt} = -j(\Omega_s - \Omega) \boldsymbol{\psi}_r^{(k)} - R_r \mathbf{i}_r^{(k)} + \mathbf{u}_r^{(k)}$$

Wektory wirujące prądów, strumieni i napięć stojana i wirnika mogą być reprezentowane przez ich część rzeczywistą i urojoną. Oznaczmy część rzeczywistą wskaźnikiem α a część urojoną wskaźnikiem β . Równania wektorowe (8.15) można wówczas zapisać w formie skalarnej

$$\begin{aligned} \frac{d(\boldsymbol{\psi}_{s\alpha}^{(k)} + j\boldsymbol{\psi}_{s\beta}^{(k)})}{dt} &= -j\Omega_s (\boldsymbol{\psi}_{s\alpha}^{(k)} + j\boldsymbol{\psi}_{s\beta}^{(k)}) - R_s (\mathbf{i}_{s\alpha}^{(k)} + j\mathbf{i}_{s\beta}^{(k)}) + (\mathbf{u}_{s\alpha}^{(k)} + j\mathbf{i}_{s\beta}^{(k)}) \\ \frac{d(\boldsymbol{\psi}_{r\alpha}^{(k)} + j\boldsymbol{\psi}_{r\beta}^{(k)})}{dt} &= -j(\Omega_s - \Omega) (\boldsymbol{\psi}_{r\alpha}^{(k)} + j\boldsymbol{\psi}_{r\beta}^{(k)}) - R_r (\mathbf{i}_{r\alpha}^{(k)} + j\mathbf{i}_{r\beta}^{(k)}) + (\mathbf{u}_{r\alpha}^{(k)} + j\mathbf{i}_{r\beta}^{(k)}) \end{aligned} \quad (8.16)$$

W równaniach powyższych należy uwzględnić relacje zachodzące między prądami i strumieniami dla stojana i rotora. Przy założeniu liniowości (praca silnika w zakresie liniowym charakterystyki magnesowania) można je zapisać w postaci równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{s\alpha}^{(k)} + j\dot{i}_{s\beta}^{(k)} \\ \dot{i}_{r\alpha}^{(k)} + j\dot{i}_{r\beta}^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_s L_r - L_m^2} \begin{bmatrix} L_r & -L_m \\ -L_m & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{s\alpha}^{(k)} + j\psi_{s\beta}^{(k)} \\ \psi_{r\alpha}^{(k)} + j\psi_{r\beta}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

gdzie L_s jest całkowitą indukcyjnością jednej fazy stojana, L_r – całkowitą indukcyjnością jednej fazy uzwojenia wirnika sprowadzoną do stojana, a L_m – indukcyjnością magnesującą. Po uwzględnieniu tej zależności w równaniu (8.16) otrzymuje się 4 równania skalarne względem pięciu zmiennych stanu $\psi_{s\alpha}^{(k)}$, $\psi_{s\beta}^{(k)}$, $\psi_{r\alpha}^{(k)}$, $\psi_{r\beta}^{(k)}$ oraz Ω , opisujące zachowanie silnika w stanach dynamicznych. Ostatnie piąte równanie otrzymuje się z równania ruchu (8.10), uwzględniając, że

$$M_e = \frac{3pL_m}{2(L_s L_r - L_m^2)} [\psi_{s\beta}^{(k)} \psi_{r\alpha}^{(k)} - \psi_{s\alpha}^{(k)} \psi_{r\beta}^{(k)}] \quad (8.18)$$

Po uporządkowaniu zależności otrzymuje się układ pięciu nieliniowych równań stanu (nieliniowość typu wielomianowego) o następującej postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{s\alpha}^{(k)}}{dt} &= -\alpha\psi_{s\alpha}^{(k)} + \alpha K_r \psi_{r\alpha}^{(k)} + \Omega_s \psi_{s\beta}^{(k)} + u_{s\alpha}^{(k)} \\ \frac{d\psi_{s\beta}^{(k)}}{dt} &= -\alpha\psi_{s\beta}^{(k)} + \alpha K_r \psi_{r\beta}^{(k)} - \Omega_s \psi_{s\alpha}^{(k)} + u_{s\beta}^{(k)} \\ \frac{d\psi_{r\alpha}^{(k)}}{dt} &= \beta K_s \psi_{s\alpha}^{(k)} - \beta\psi_{r\alpha}^{(k)} + (\Omega_s - \Omega)\psi_{r\beta}^{(k)} + u_{r\alpha}^{(k)} \\ \frac{d\psi_{r\beta}^{(k)}}{dt} &= \beta K_s \psi_{s\beta}^{(k)} - \beta\psi_{r\beta}^{(k)} - (\Omega_s - \Omega)\psi_{r\alpha}^{(k)} + u_{r\beta}^{(k)} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3p^2 K_r}{2\sigma L_s J} [\psi_{s\beta}^{(k)} \psi_{r\alpha}^{(k)} - \psi_{s\alpha}^{(k)} \psi_{r\beta}^{(k)}] - \frac{P}{J} M_m \end{aligned} \quad (8.19)$$

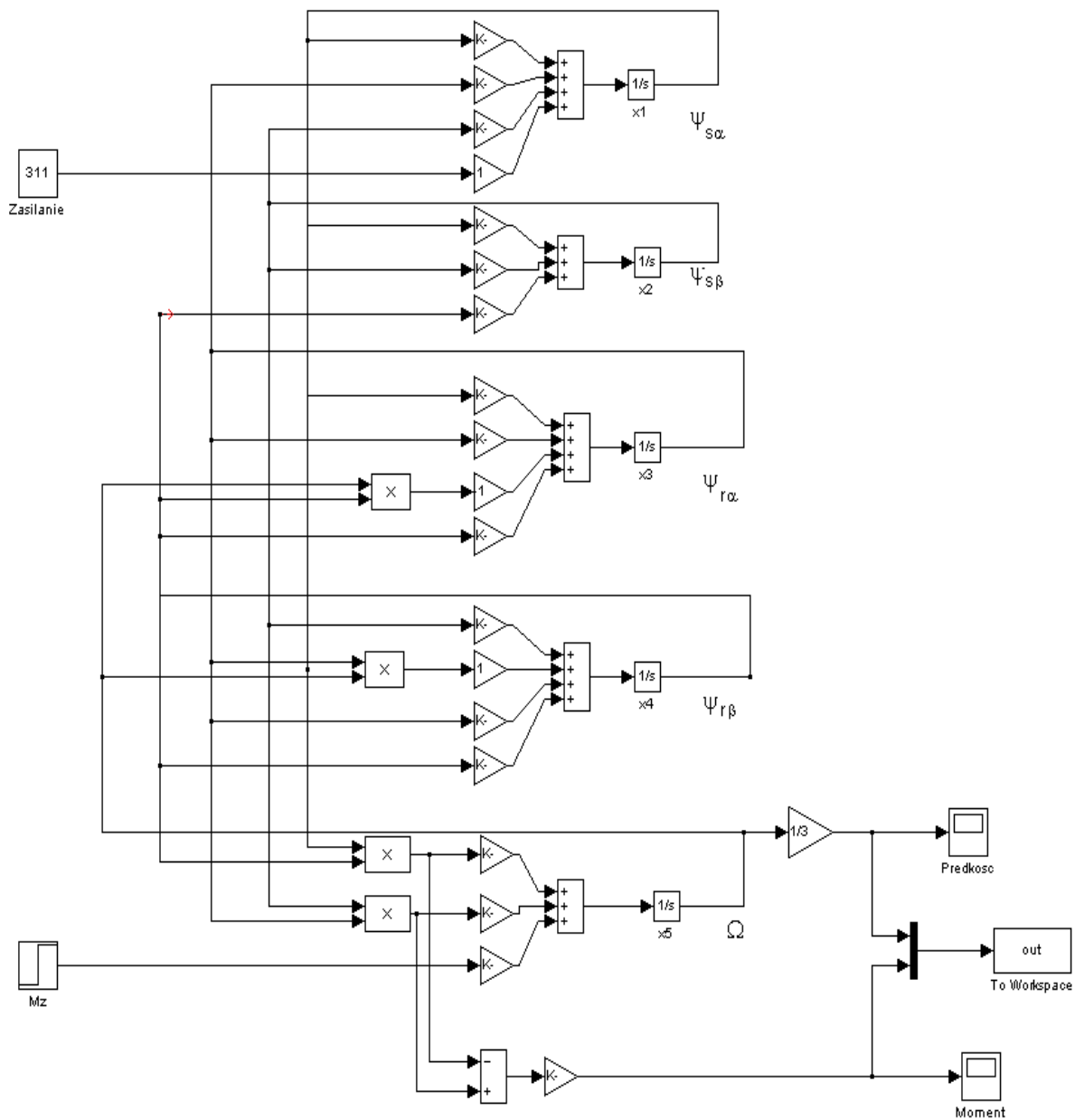
W równaniach tych użyto następujących współczynników: $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$, $K_s = \frac{L_m}{L_s}$, $K_r = \frac{L_m}{L_r}$,

$\alpha = \frac{R_s}{\sigma L_s}$, $\beta = \frac{R_r}{\sigma L_r}$. Zauważmy, że przy związaniu układu współrzędnych z prędkością

synchroniczną wektor przestrzenny 3-fazowego symetrycznego układu napięć jest nieruchomy, a jego moduł jest równy wartości maksymalnej napięcia zasilającego sinusoidalnego U_m . Dla uproszczenia modelu można przyjąć $u_{s\alpha}^{(k)} = U_m$ oraz $u_{s\beta}^{(k)} = 0$, co oznacza, że wektor przestrzenny napięcia wymuszającego pokrywa się z osią rzeczywistą. Dodatkowo, przy braku zasilania od

strony wirnika należy założyć, że $u_{r\alpha}^{(k)} = u_{r\beta}^{(k)} = 0$. Na rys. 8.7 przedstawiono model dynamiczny silnika indukcyjnego, sformułowany na podstawie równań stanu (8.19) w konwencji Simulinka.

W badaniach symulacyjnych [58] przyjęto parametry modelu odpowiadające silnikowi o mocy $P=1700\text{W}$, $p=3$, zasilanego z sieci trójfazowej o napięciu fazowym 230V o częstotliwości $f=50\text{Hz}$. Wartości zmierzone parametrów silnika wynoszą: rezystancja twornika $R_s=3,57\Omega$, rezystancja wirnika sprowadzona do stojana $R_r=3,68\Omega$, indukcyjność stojana $L_s=0,284\text{H}$, indukcyjność wirnika sprowadzona do stojana $L_r=0,298\text{H}$, indukcyjność magnesująca $L_m=0,262\text{H}$, moment bezwładności sprowadzony do wału silnika $J=0,31\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Oznacza to, że



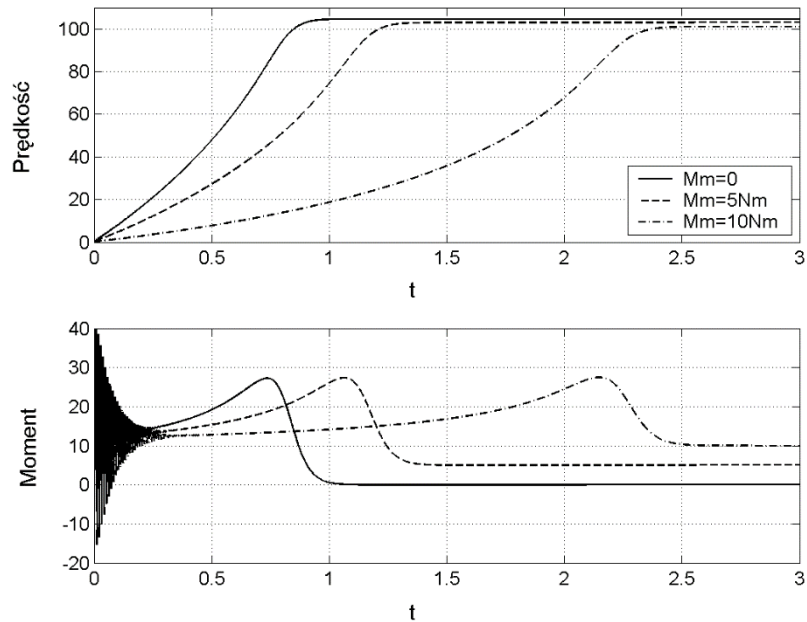
Rys. 8.7 Model silnika indukcyjnego w Simulinku w układzie współrzędnych związanych z prędkością synchroniczną

parametry liczbowe modelu wynoszą: $\sigma=0,1889$, $K_s=0,9225$, $K_r=0,8792$, $\alpha=66,5454$, $\beta=65,3732$.

Wymuszenie napięciowe silnika wynosi $u_{s\alpha}^{(k)} = U_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 311,27V$. Moment elektromagnetyczny rozwijany przez silnik wynosi

$$M_e = 73,74(\psi_{s\beta}^{(k)}\psi_{r\alpha}^{(k)} - \psi_{s\alpha}^{(k)}\psi_{r\beta}^{(k)}) \quad (8.20)$$

Prędkość mechaniczna silnika Ω_m jest równa $\Omega_m=1/3\Omega$. Przy częstotliwości sieci zasilającej $f=50\text{Hz}$ prędkość mechaniczna synchroniczna wynosi $\Omega_{ms} = 104.7 \text{ rad/s}$, a moment znamionowy $M_n=P/\Omega_{ms}=16.24\text{Nm}$. Na rys. 8.8 przedstawiono przebiegi momentu elektromagnetycznego $M_e(t)$ oraz prędkości $\Omega(t)$ przy rozruchu silnika w różnych warunkach obciążenia: $M_m=0$, $M_m=5\text{N}\cdot\text{m}$, (obciążenie odpowiadające połowie momentu rozruchowego) oraz $M_m=10\text{N}\cdot\text{m}$ (obciążenie bliskie momentowi rozruchowemu rozwijanemu przez silnik).

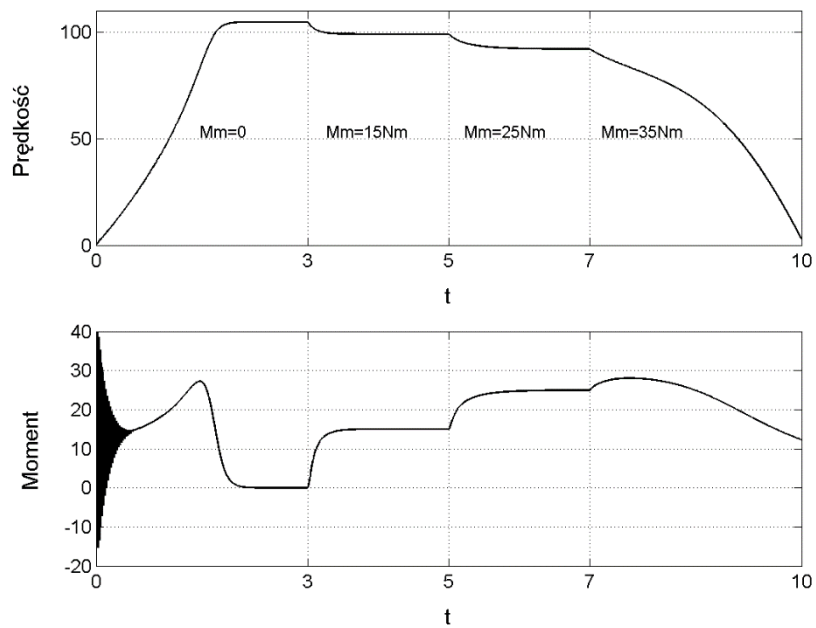


Rys. 8.8 Przebiegi prędkości obrotowej oraz momentu elektromagnetycznego silnika indukcyjnego w różnych warunkach obciążenia

W przebiegu momentu na początku rozruchu widoczny jest stan nieustalony charakteryzujący się oscylacjami w obwodzie elektromagnetycznym wokół średniego momentu rozruchowego. Obserwuje się silny wpływ obciążenia na czas trwania rozruchu. Przy obciążeniu bliskim momentowi rozruchowemu czas trwania rozruchu wydłuża się wielokrotnie. Przy zbyt dużym obciążeniu silnik nie jest w stanie rozwinąć swojej prędkości obrotowej.

Na rys. 8.9 zilustrowano wpływ zmian momentu obciążającego na stan pracy silnika indukcyjnego (prędkość obrotowa i moment elektromagnetyczny rozwijany przez silnik) przy założeniu, że wszystkie zmiany obciążenia zachodzą po ustaleniu się prędkości obrotowej. Rozruch odbywa się w stanie jałowym, po czym następuje kolejno zwiększanie obciążenia, od

zera poprzez 15Nm, 25Nm aż do 35Nm. Przy ostatniej wartości momentu obciążenia następuje przekroczenie momentu maksymalnego (krytycznego), przy którym zmienia się kierunek obrotów (w symulacji przyjęto obciążenie aktywne, zdolne do nadania ruchu silnikowi).

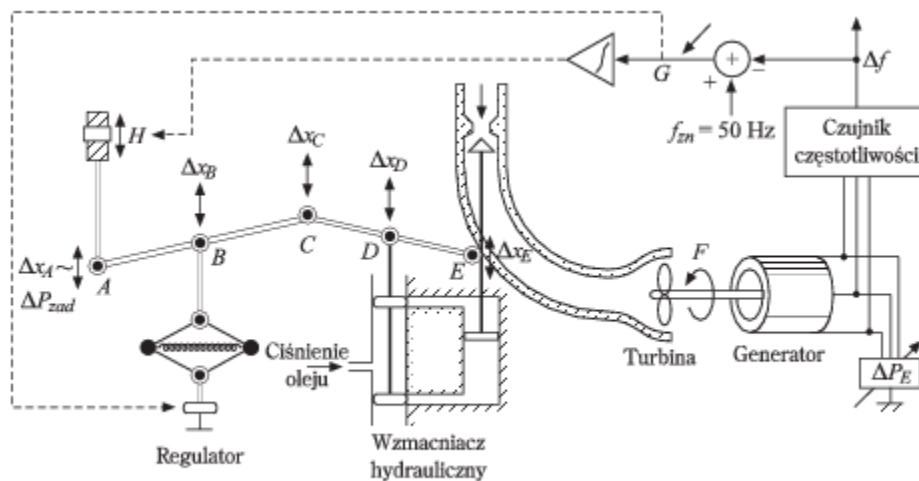


Rys. 8.9 Wpływ zmiany momentu obciążenia na stan pracy silnika indukcyjnego (moment obciążenia M_m wyrażony w Nm)

9. MODEL DYNAMICZNY SIECI ELEKTROENERGETYCZNEJ DLA STABILIZACJI CZĘSTOTLIWOŚCI (Dynamic model of power systems for frequency stabilization)

Podstawowym elementem systemu elektroenergetycznego jest układ generatora energii, dokonujący konwersji energii mechanicznej w elektryczną. Ważnym czynnikiem takiego procesu jest kontrola i utrzymanie częstotliwości na wymaganym poziomie 50Hz. Obciążenie systemu odbiornikami energii elektrycznej powoduje zmniejszenie prędkości generatora i w efekcie obniżenie częstotliwości. System kontrolny powinien natychmiast zarejestrować ten fakt i spowodować zwiększenie mocy mechanicznej powodującej wzrost prędkości wału generatora (w turbogeneratorach osiąga się to przez zwiększenie przepływu pary przez turbinę) do poziomu gwarantującego powrót do częstotliwości znamionowej. Odwrotne działanie (zmniejszenie przepływu pary) powinno nastąpić przy zwiększeniu częstotliwości systemu powyżej 50Hz na skutek zmniejszenia obciążenia generatora. Układ sprzężenia zwrotnego reagujący na zmianę częstotliwości systemu musi być automatyczny i działający niezależnie od człowieka.

Na rysunku 9.1 przedstawiono schematycznie schemat funkcjonalny układu generatora ze sprzężeniem zwrotnym częstotliwościowym.



Rys. 9.1 Schemat funkcjonalny układu generatora ze sprzężeniem częstotliwościowym

Para wodna podawana jest na turbinę przez zawór, którego położenie można regulować poprzez układ zadawania prędkości (zmiana $\Delta x_A \sim \Delta P_{zad}$ powoduje zmianę poziomu w punkcie C , Δx_C , a ta z kolei przenosi się na zmianę Δx_E , czyli położenia zaworu). Pozycja ustalona zaworu decyduje o mocy zadanej turbiny P_{zad} . Wzrost obciążenia elektrycznego generatora powoduje spadek częstotliwości, który przenosi się na regulator prędkości powodujący poprzez układ dźwigni zmianę położenia zaworu. Działanie regulatora prędkości jest wzmacniane poprzez wzmacniacz hydrauliczny (zwykle olejowy), umożliwiając wykonanie pracy potrzebnej do zmiany położenia zaworu.

Obie metody zmiany dopływu pary poprzez działanie układu zadawania prędkości i regulator prędkości współdziałają ze sobą, tworząc układ regulacji PI . Regulator prędkości tworzy część proporcjonalną P o wzmocnieniu $1/R$. Oznacza to, że zmiana poziomu Δx_B w punkcie B jest proporcjonalna do zmian częstotliwości Δf ze współczynnikiem $1/R$, czyli

$$\Delta x_B = \frac{1}{R} \Delta f \quad (9.1)$$

Układ całkujący sumuje zmiany częstotliwości Δf ze wzmocnieniem K_i , wytwarzając sygnał sterujący układem zadawania prędkości i tworząc w ten sposób część całkującą sygnału sterującego, powodującą zmianę położenia dźwigni zadawania prędkości ΔH , gdzie

$$\Delta H = K_i \int \Delta f dt \quad (9.2)$$

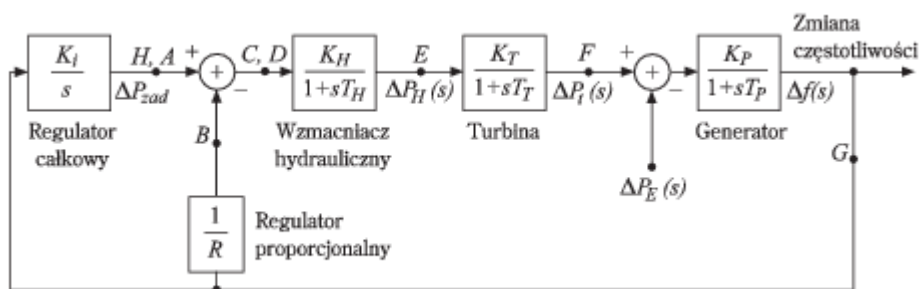
przy K_i ujemnym (układ stabilizujący).

Wszystkie elementy układu generatora są nieliniowe. W celu ułatwienia analizy dokonuje się zwykle linearyzacji charakterystyk elementów wokół ich punktu pracy. Otrzymuje się w ten sposób system liniowy o parametrach zmieniających się wraz z punktem pracy poszczególnych jego elementów. Dalsze uproszczenie polega na przyjęciu zastępczych transmitancji operatorowych pierwszego rzędu dla poszczególnych elementów systemu. W tabelicy 9.1 zestawiono modele operatorowe elementów układu, przyjęte w dalszej analizie. Typowe wartości dla generatora o mocy znamionowej 1000MW to: $K_h=K_t=1.0$, $K_p=120\text{Hz/MW}$, $T_h=80\text{ms}$, $T_t=0.3\text{s}$, $T_p = 20\text{s}$, $R=2.4\text{Hz/MW}$.

Tablica 9.1 Zlinearyzowane modele operatorowe elementów systemu elektroenergetycznego

Element układu	Opis operatorowy
Regulator prędkości P	$\frac{1}{R}$
Sterownik całkujący I	$\frac{-K_i}{s}$
Wzmacniacz hydrauliczny	$\frac{K_h}{1 + sT_h}$
Turbina	$\frac{K_t}{1 + sT_t}$
Generator	$\frac{K_p}{1 + sT_p}$

Na rys. 9.2 przedstawiono schemat blokowy zlinearyzowanego układu bloku generatora z oznaczeniami poszczególnych zmiennych w dziedzinie operatorowej, który może być bezpośrednio zamodelowany w języku Simulink.

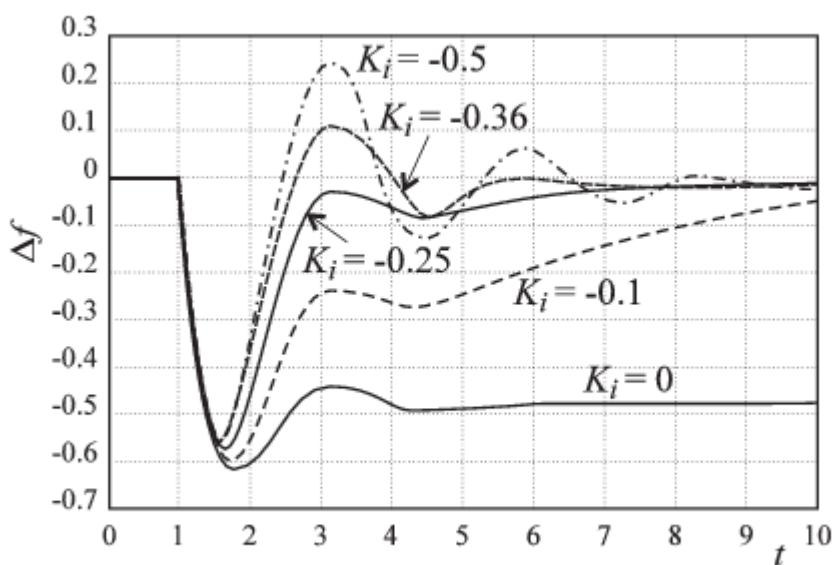


Rys. 9.2 Schemat blokowy zlinearyzowanego modelu systemu elektroenergetycznego

Na schemacie zaznaczono węzły A, B, C, D, E, F, G, H , które odpowiadają punktom na rys. 9.1, umożliwiając identyfikację obu układów. Zmiana zadanej mocy ΔP_{zad} w punkcie A (sygnał wyjściowy układu zadawania prędkości) sumuje się (ze znakiem minus) z sygnałem regulatora prędkości (punkt B), tworząc sygnał błędu sterujący układem (punkt C). Poprzez układ

wzmacniacza hydraulicznego przენosi się on na turbinę, wytwarzając sygnał zmiany mocy mechanicznej turbiny ΔP_t . W punkcie sumacyjnym na wejściu generatora zmiana mocy turbiny ΔP_t jest porównywana ze zmianą mocy obciążenia elektrycznego ΔP_E , wytwarzając sygnał sterujący generatora. Na wyjściu bloku generatora pojawia się sygnał $\Delta f(s)$, będący transformataą Laplace'a zmian częstotliwości systemu $\Delta f = f(t) - 50$, który jest podawany jako sygnał sprzężenia zwrotnego na regulator PI , sterujący pracą całego układu. Sygnałem wyjściowym układu jest zmiana częstotliwości generatora przy zmianie obciążenia elektrycznego ΔP_E .

Wielkością, którą można wpływać na zmianę charakteru przebiegów przejściowych w układzie, jest współczynnik K_i regulatora całkującego. Na rys. 9.3 przedstawiono zmiany częstotliwości układu spowodowane 20% zmianą obciążenia, przy różnych wartościach współczynnika wzmocnienia członu całkującego K_i , poczynając od $K_i = 0$ aż do $K_i = -0.5$.

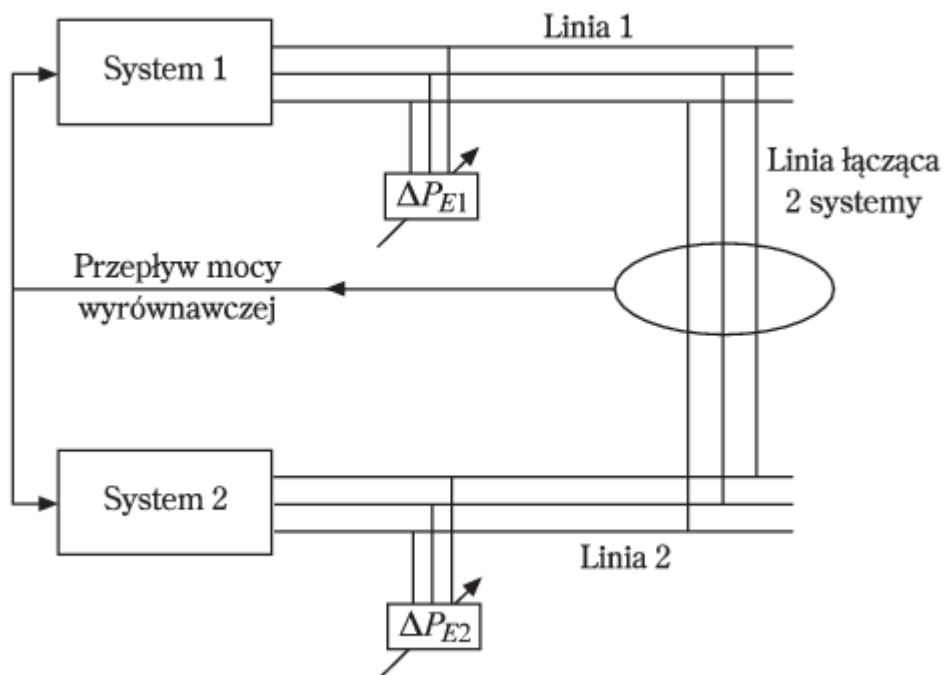


Rys. 9.3 Zmiany częstotliwości układu elektroenergetycznego przy 20% zmianie obciążenia i różnych wartościach nastaw regulatora całkującego

Przy braku sprzężenia całkującego ($K_i = 0$) częstotliwość układu nie wraca do wartości zadanej i częstotliwość systemu w stanie ustalonym różni się od wartości zadanej ($\Delta f = 0$). Wprowadzenie toru sprzężenia całkującego powoduje, że układ samoczynnie doregulowuje swoją częstotliwość do wartości zadanej 50Hz, przy czym czas regulacji jest uzależniony od doboru wartości

współczynnika K_i . W przypadku przebiegów z rys. 5.35 za optymalną należy uznać wartość $K_i = -0.25$, przy której nie ma jeszcze widocznego przeregulowania, a jednocześnie stan przejściowy trwa najkrócej.

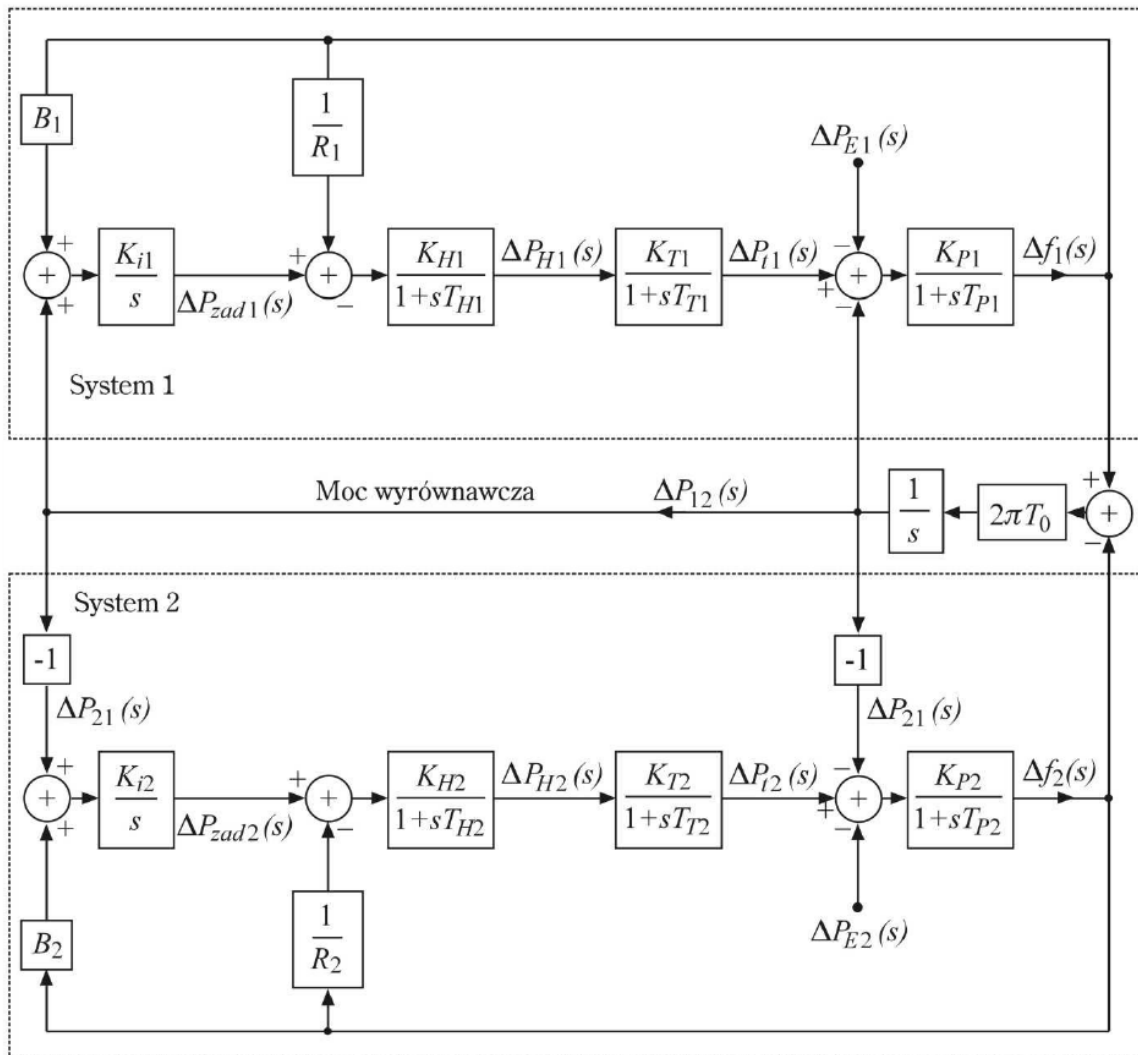
Układ sprzężenia częstotliwościowego stosuje się w systemach elektroenergetycznych złożonych z wielu układów generatorów, wprowadzając połączenia między nimi. Obciążenie jednego układu generatora poprzez linię łączącą przenosi się na inne jednostki, które współpracują ze sobą, zasilając swoją mocą w stanie przejściowym jednostkę najbardziej obciążoną. Tor regulacji częstotliwości zapewnia samoczynny powrót obciążenia do stanu ustalonego, w którym każdemu układowi generatora przypisane jest odpowiednie obciążenie. Aby spełnić to zadanie, każda jednostka generatora wymaga monitorowania częstotliwości lokalnych, na podstawie których podejmowana jest odpowiednia akcja toru sprzężenia zwrotnego.



Rys. 9.4 Schemat funkcjonalny dwu bloków generatora współpracujących ze sobą w systemie elektroenergetycznym. (P_{E1} i P_{E2} oznaczają obciążenie elektryczne poszczególnych bloków generatora)

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do dwu systemów generacyjnych współpracujących ze sobą, jak to przedstawiono na rys. 9.4. Każdy układ generatora posiada własne, przypisane mu obciążenie, a przepływ mocy między nimi odbywa się poprzez linię łączącą oba podukłady.

Przyjmując schemat operatorowy każdej jednostki układu generatora, jak na rys. 9.2, otrzymuje się zlinearyzowany model małosygnałowy systemu, przedstawiony na rys. 9.5. W modelu tym sygnały w poszczególnych węzłach odpowiadają transformacie Laplace'a sygnałów występujących w urządzeniach rzeczywistych. W szczególności ΔP_{12} oznacza sygnał proporcjonalny do przepływu mocy wyrównawczej z układu generacyjnego 1 do 2.



Rys.

9.5. Schemat blokowy zlinearyzowanego układu współpracy dwu generatorów w systemie elektroenergetycznym

Każdy układ generatora wyróżnia się własną lokalną zmianą częstotliwości (Δf_1 i Δf_2 odpowiadające w dziedzinie operatorowej $\Delta f_1(s)$ i $\Delta f_2(s)$), na podstawie których wytwarzany jest sygnał sterujący przepływem mocy wyrównawczej i doregulowaniem częstotliwości obu podsystemów do wartości znamionowych. Jeśli na przykład pobór mocy elektrycznej zostanie w obszarze 2 zwiększony ($\Delta P_{E2} > 0$), częstotliwość w tym obszarze zmaleje ($\Delta f_2(s) < 0$) i nastąpi zwiększony przepływ mocy wyrównawczej z obszaru 1 do obszaru 2 ($\Delta P_{12} > 0$), przy czym wielkość tego przepływu jest uzależniona od różnicy zmian kątów θ_1 i θ_2 położenia wału obu generatorów. Przepływ ten może być zapisany w dziedzinie zmiennej s w postaci

$$\Delta P_{12}(s) = T_0 [\Delta \theta_1(s) - \Delta \theta_2(s)] \quad (9.3)$$

gdzie T_0 jest stałą charakteryzującą synchronizację linii łączącej oba podsystemy (typowa wartość $T_0 = 0.0707$ MW/rad). Biorąc pod uwagę, że zmiana kątowa jest uzależniona od zmiany częstotliwości wzorem $\Delta \theta = \int 2\pi \Delta f dt$ otrzymuje się

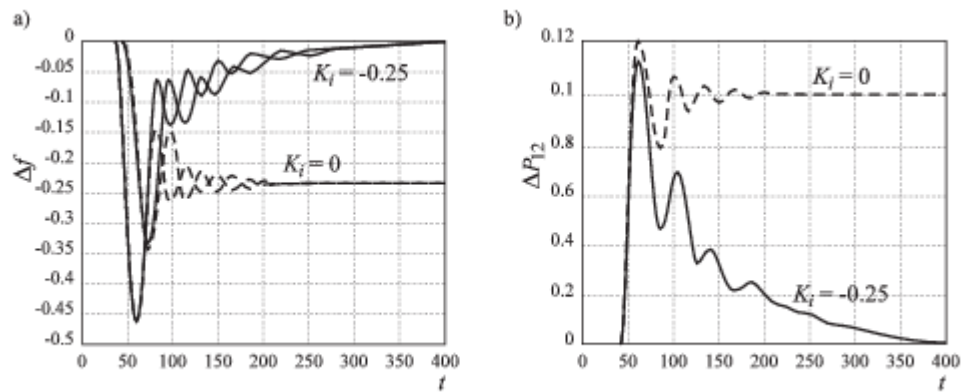
$$\Delta P_{12}(s) = 2\pi T_0 \left[\frac{\Delta f_1(s)}{s} - \frac{\Delta f_2(s)}{s} \right] \quad (9.4)$$

Ta operacja jest odwzorowana na schemacie z rys. 9.5 w postaci 3 bloków w środkowej części rysunku (sumator, wzmocnienie $2\pi T_0$, układ całkujący).

Zwiększony przepływ mocy z obszaru 1 do 2 jest odczuwalny przez układ 1 w identyczny sposób jak zwiększenie obciążenia elektrycznego ΔP_{E1} . Stąd w węźle sumacyjnym modelu obie zmiany ΔP_{E1} i ΔP_{12} są brane z jednakowym znakiem (minus). Przez symetrię $\Delta P_{E1} = -\Delta P_{12}$ (moc przepływająca z układu 2 do układu 1) i moc ΔP_{21} jest sumowana z ΔP_{E2} również z jednakowym znakiem (minus). W efekcie układ regulacji częstotliwości w systemie połączonym reaguje nie tylko na zmianę częstotliwości lokalnej, ale również na zmiany przepływu mocy wyrównawczej w linii łączącej oba systemy. Ze względu na to, że sterownik całkujący posiada tylko jedno wejście, oba sygnały: zmiany częstotliwości i przepływu mocy wyrównawczej tworzą jeden sygnał wypadkowy sterujący sterownikiem. Dla układu pierwszego jest to $\Delta P_{12} + B_1 \Delta f_1$, natomiast dla układu drugiego: $\Delta P_{21} + B_2 \Delta f_2$. Współczynniki B_1 i B_2 są zwykle sobie równe i przyjmowane jako $(1/K_p + 1/R)$. Dla danych liczbowych z rozważanego przykładu wartości te wynoszą $B_1 = B_2 = 0.425$ MW/Hz. Dla każdej niezerowej wartości współczynnika wzmocnienia członu całkującego $K_{i1} < 0$ i $K_{i2} < 0$ stan przejściowy układu, spowodowany zmianą obciążenia ΔP_{E1} lub ΔP_{E2} , wygasa po upływie określonego czasu, w wyniku czego zmiany częstotliwości

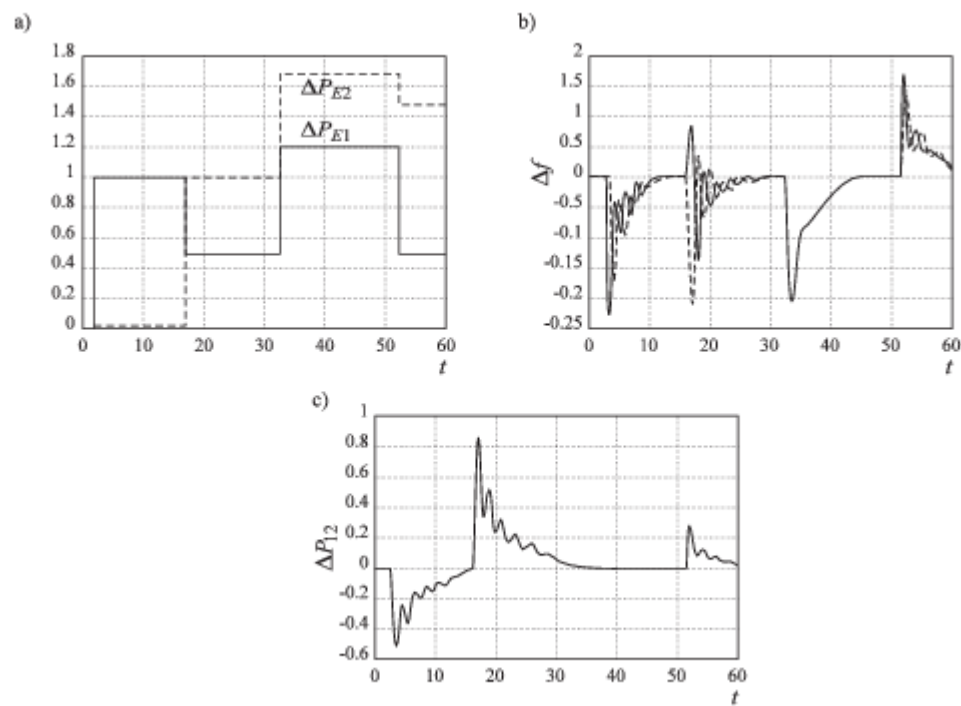
lokalnych Δf_1 , Δf_2 oraz przepływu mocy wyrównawczej ΔP_{12} dążą do zera (układ powraca do znamionowych warunków pracy bez przepływu mocy między systemami).

Na rys. 9.6 przedstawiono przebiegi zmian częstotliwości lokalnych układów Δf_1 i Δf_2 (rys. 9.6a) oraz mocy wyrównawczej ΔP_{12} (rys. 9.6b) przy zmianie obciążenia ΔP_{E2} o 20% przy 2 różnych nastawach współczynników K_{i1} oraz K_{i2} ($K_{i1} = K_{i2} = 0$ oraz $K_{i1} = K_{i2} = -0.25$). Jak widać, wpływ toru całkującego sprzężenia jest bardzo znaczący. Przy jego braku częstotliwości obu systemów nie powracają do wartości znamionowych ($\Delta f_1 = \Delta f_2$ różne od zera w stanie ustalonym), a przepływ mocy wyrównawczej z jednego systemu do drugiego utrzymuje się bez przerwy.



Rys. 9.6 Przebiegi zmian częstotliwości (a) oraz mocy wyrównawczej (b) w systemie elektroenergetycznym ze sprzężeniem zwrotnym zawierającym 2 bloki generatora dla dwu nastaw współczynnika $K_i = 0$ oraz $K_i = -0.25$ (moc wyrównawcza wyrażona w jednostkach względnych)

Na rysunku 9.7 przedstawiono skumulowane, przypadkowe zmiany obciążenia elektrycznego obu systemów i ich wpływ na przebiegi częstotliwości lokalnych oraz przepływ mocy wyrównawczej. Rysunek 9.7a przedstawia zadane zmiany mocy odbiorników $\Delta P_{E1}(t)$ (linia ciągła) i $\Delta P_{E2}(t)$ (linia przerywana), rys. 9.7b – przebiegi chwilowych zmian częstotliwości lokalnych $\Delta f_1(t)$ i $\Delta f_2(t)$, natomiast rys. 9.7c – przebieg mocy wyrównawczej w systemie, wywołany przez zmiany obciążeń.



Rys. 9.7 Wpływ skumulowanych zmian obciążenia systemu złożonego z 2 bloków generatora: a) charakterystyki zmian obciążenia ΔP_{E1} i ΔP_{E2} , b) zmiana częstotliwości obu generatorów, c) przepływ mocy wyrównawczej ΔP_{12} (moce wyrażone w jednostkach względnych)

Przy jednakowych, zsynchronizowanych zmianach obciążeń elektrycznych obu systemów ($\Delta P_{E1} = \Delta P_{E2}$) zmiany częstotliwości lokalnych są identyczne ($\Delta f_1 = \Delta f_2$) i zgodnie ze wzorem (9.4) nie występuje przepływ mocy wyrównawczej z jednego systemu do drugiego.

10. SYSTEMY CHAOTYCZNE (Chaotic systems)

10.1 Podstawowe pojęcia

Chaos deterministyczny – własność równań lub układów równań, polegająca na dużej wrażliwości rozwiązań na dowolnie małe zaburzenie parametrów lub zmiany warunków początkowych. Dotyczy to zwykle nieliniowych równań różniczkowych i różnicowych, opisujących układy dynamiczne.

Przesłankę prowadzącą do sformułowania teorii chaosu były badania Edwarda Lorenza nad modelami prognozowania pogody. Zgodnie z ówczesnym, deterministycznym rozumieniem rzeczywistości minimalna zmiana warunków początkowych powinna prowadzić do proporcjonalnie niewielkich zmian wyniku modelu. W trakcie pracy nad modelem, z natury dynamicznym (dane z iteracji wcześniejszych są danymi wejściowymi dla iteracji następujących), w celu ułatwienia pracy wprowadził zaokrąglone wartości wyjściowe. Okazało się, że wynik modelu diametralnie odbiegał od tego, co przewidywał ten sam model przy danych wprowadzonych z większą dokładnością. Dalsze badania nad układami dynamicznymi doprowadziły do wniosku, iż wbrew powszechnym przekonaniom w nauce, niewielkie zaburzenie warunków początkowych powoduje rosnące wykładniczo z czasem zmiany w zachowaniu układu. Popularnie nazywane jest to efektem motyla - znikoma różnica na jakimś etapie może po dłuższym czasie urosnąć do dowolnie dużych rozmiarów. Powoduje to, że choć model jest deterministyczny, w dłuższej skali czasowej wydaje się zachowywać w sposób losowy.

Zachowanie takie można zaobserwować w wielu zjawiskach fizycznych, między innymi w zmianach pogody, oscylujących reakcjach chemicznych, zachowaniu niektórych obwodów elektrycznych i ruchu ciał oddziałujących grawitacyjnie.

Wykładniki Lapunowa - Ścisłym kryterium chaotyczności jest określenie wartości wykładników Lapunowa charakteryzujących stopień rozbiegania się przebiegów startujących z podobnych (choć różnych) warunków początkowych. Układ jest chaotyczny, jeśli ma co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. W takim wypadku w przestrzeni fazowej blisko leżące trajektorie mogą po pewnym czasie dowolnie się od siebie oddalić (to oddalanie się "z czasem" różnych trajektorii obliczonych dla odmiennych wartości parametru leży w definicji chaotyczności względem tego parametru). Choć dla idealnie dokładnie zadanych parametrów początkowych jesteśmy w stanie dokładnie przewidzieć zachowanie się układu, w praktyce,

gdzie warunki początkowe znane są zawsze ze skończoną dokładnością, w krótkim czasie układ staje się nieprzewidywalny. Układ jest uważany za chaotyczny, gdy niestabilność dotyczy prawie wszystkich warunków początkowych (formalnie zestawy tych warunków tworzą zbiór gęsty).

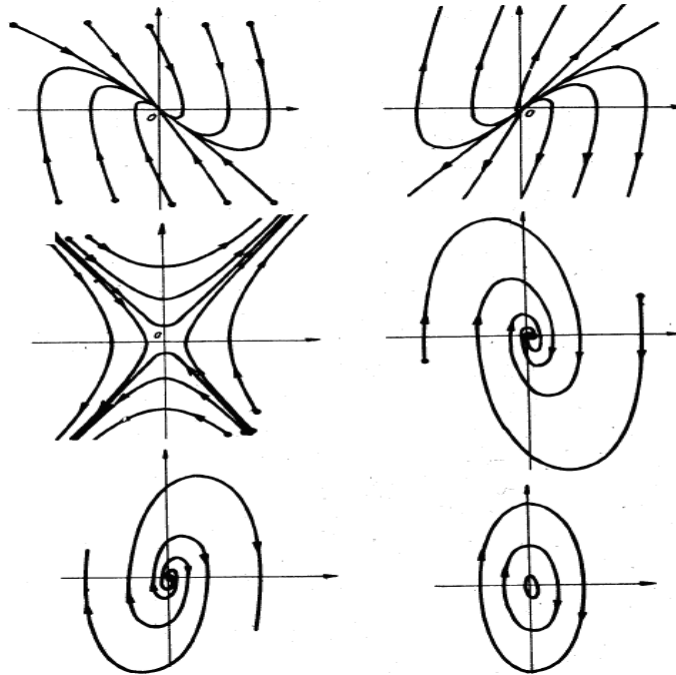
Dowiedzenie, że dany, konkretny układ równań jest chaotyczny dla pewnych wartości parametrów modelu, jest na ogół procesem złożonym. Dlatego niewłaściwe jest nazywanie chaotycznym każdego układu przejawiającego skomplikowane zachowania. Przykładami układów mylnie nazywanych chaotycznymi są turbulencje i zachowanie giełdy.

Przestrzeń fazowa to przestrzeń wszystkich możliwych stanów w jakich może znajdować się badany układ. Każdy stan układu jest jednym punktem tej przestrzeni.

Płaszczyzna fazowa jest sposobem wizualizacji charakterystyki rozwiązań pewnej klasy równań różniczkowych: jednorodnych równań różniczkowych pierwszego rzędu w dwóch wymiarach.

Atraktor to zbiór w przestrzeni fazowej, do którego w miarę upływu czasu zbiegają trajektorie rozpoczynające się w różnych obszarach przestrzeni fazowej. Atraktorem może być punkt, zamknięta krzywa (cykl graniczny) lub fraktal (dziwny atraktor). Atraktor jest jednym z podstawowych pojęć używanych w teorii chaosu.

Przykłady atraktorów w systemach deterministycznych (rys. 10.1)



Rys. 10.1 Przykłady atraktorów (punktów osobliwych w systemach deterministycznych): węzeł stabilny i niestabilny (górny rząd). Siodło i ognisko stabilne (rząd środkowy), ognisko niestabilne i środek (rząd dolny).

Dziwny atraktor, atraktor chaotyczny jest zbudowany na nieskończonym zbiorze niestabilnych orbit okresowych, uporządkowanych w sposób hierarchiczny. Krótsze orbity dają zgrubne przybliżenie atraktora, zaś dłuższe ujawniają bardziej szczegółową jego topologiczną strukturę. Jeśli w danym układzie dynamicznym występuje dziwny atraktor to jest to równoważne stwierdzeniu, że ten układ jest chaotyczny.

Cykl graniczny to rozwiązanie okresowe w przestrzeni fazowej, w którego otoczeniu nie znajdują się inne rozwiązania okresowe.

Intermitencja – zachowanie pewnych układów złożonych, oznaczające przełączanie układu pomiędzy dwoma typami zachowań, np. zachowaniem prawie periodycznym oraz całkowicie chaotycznym.

Niektóre układy dynamiczne są chaotyczne wszędzie, ale w większości wypadków takie zachowanie dotyczy jedynie pewnego podzbioru przestrzeni fazowej. Najbardziej interesujący przypadek zachodzi, gdy chaotyczność dotyczy określonego atraktora, gdyż trajektorie z całego jego obszaru przyciągania mają tę własność.

Bifurkacja jest to zjawisko skokowej zmiany własności modelu matematycznego przy drobnej zmianie jego parametrów (np. warunków początkowych procesu). Pojęcie często spotykane i istotne przy rozwiązywaniu równań różniczkowych oraz teorii chaosu.

10.2 Fraktale i chaos

Z chaosem związane jest ściśle pojęcie fraktala (struktury geometrycznej) jako dziwnego atraktora charakteryzującego rozwiązanie równań różniczkowych typu chaotycznego. Dziwne atraktory są pomostem łączącym chaos i fraktale. Jeżeli patrzemy na nie jako na struktury geometryczne, widzimy fraktale (związane jest to z wymiarem Hausdorffa atraktorów), jeżeli chcemy je analizować jako układy dynamiczne, to mamy do czynienia z chaosem (co z kolei wiąże się z wykładnikiem Lapunowa).

10.2.1 Wprowadzenie

Fraktal w znaczeniu potocznym oznacza obiekt samopodobny (pod względem graficznym) albo nieskończenie subtelny, zachowujący subtelne szczegóły nawet w wielokrotnym powiększeniu. Brak jest ścisłej definicji fraktala. Zwykle określa się go jako zbiór, który:

- ma nietrywialną strukturę budowy w każdym powiększeniu,

- struktura ta nie daje się łatwo opisać w tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to w skali przybliżonej,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną.

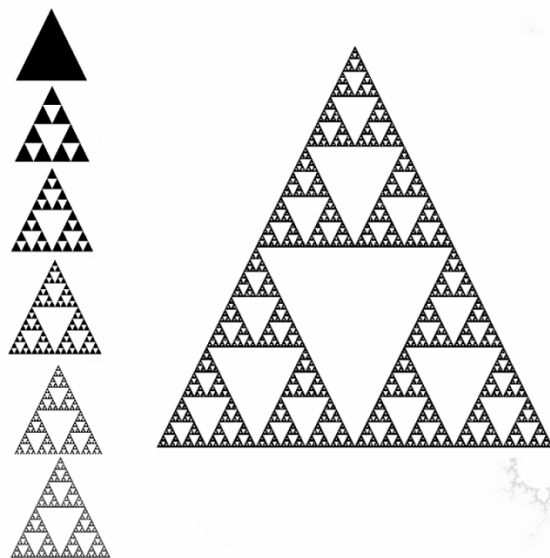
Obiekty samopodobne występują w przyrodzie. Na przykład jeden liść paproci przypomina całą roślinę, odpowiednio pomniejszoną. Podobne cechy ma fragment kwiatu kalafiora, płatek śniegu, zgrupowanie chmur, sieć dopływów niektórych rzek lub pewne łańcuchy gór.

Analizując układy dynamiczne o charakterze chaotycznym można natknąć się na atraktory o strukturze fraktalnej i zadziwiających kształtach, przypominające grafikę współczesną. Z drugiej strony, można poszukiwać układów dynamicznych, których atraktory posiadają określony kształt lub spełniają zadane warunki. W taki sposób kodować można informację graficzną: cyfrowy zapis układu dynamicznego w postaci definiujących go równań zajmuje mniej pamięci komputera niż graficzne odwzorowanie, bit po bicie, odpowiadającego mu atraktora. Fraktale są więc narzędziem opisu zachowania się układów chaotycznych.

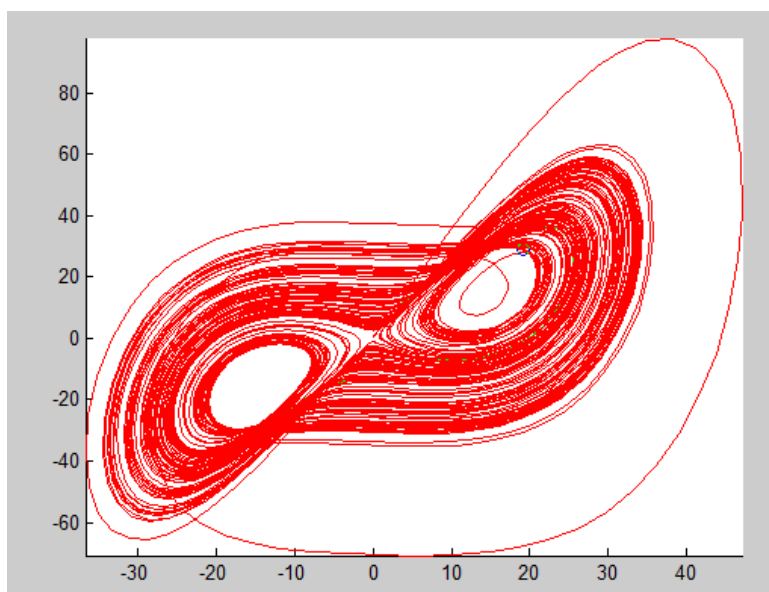
Przykłady fraktali

Na rysunkach od 10.2 do 10.6 przedstawiono kilka przykładów obrazów fraktali. Należy zwrócić uwagę, że obrazy te są opisane pewnym układem równań różniczkowych nieliniowych (przedstawiają sobą rozwiązania tych równań przy założeniu określonych warunków początkowych). Obrazy fraktalne mogą (i często są) źródłem nowych pomysłów artystycznych. Dodatkowym ułatwieniem ich tworzenia jest ścisły opis matematyczny. Matematyka staje się więc źródłem wzorców artystycznych.

Trójkąt Sierpińskiego



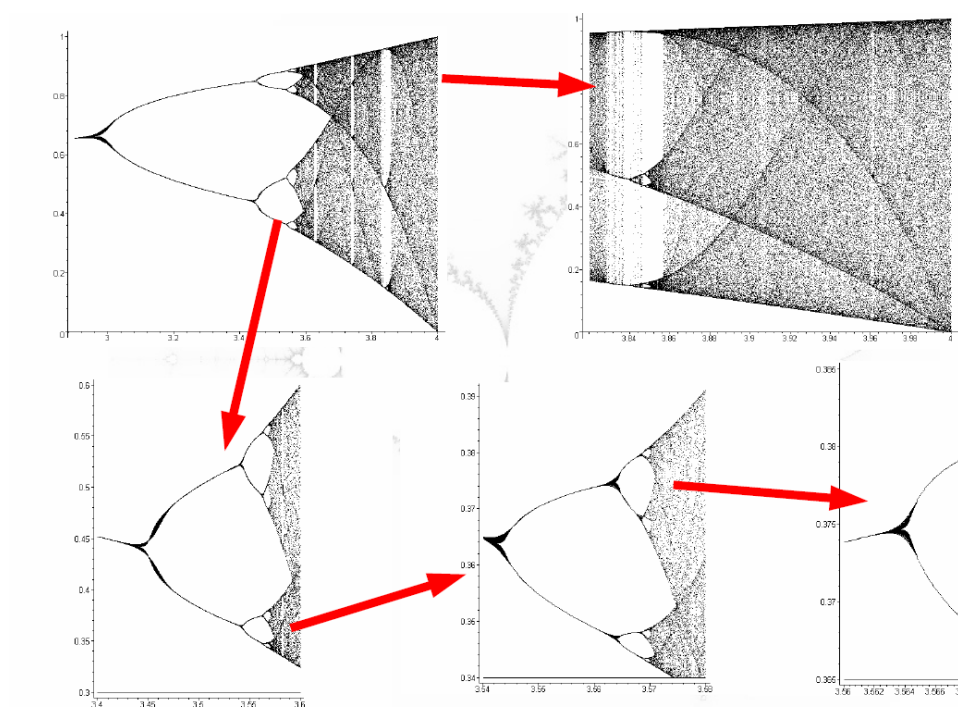
Rys. 10.2 Trójkąt Sierpińskiego



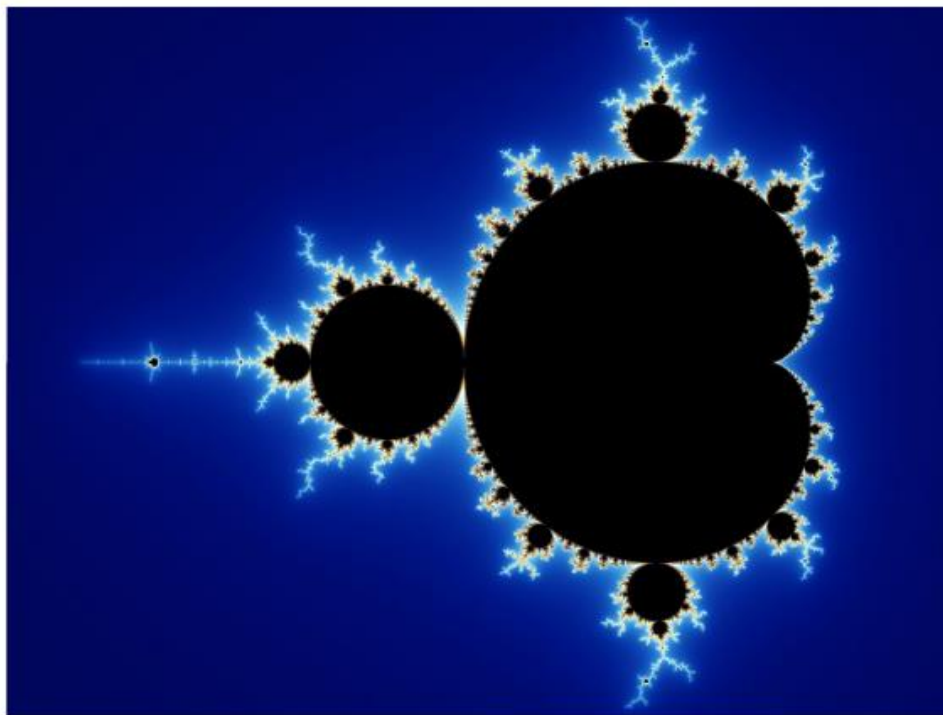
Rys. 10.3 Atraktor Lorentza



Rys. 10.4 Przykład obrazu gór interpretowalny jako fraktal



Rys. 10.5 Diagram stanów ustalonych w systemie chaotycznym



Rys. 10.6 Zbiór Mandelbrota

10.2.2 Wymiary fraktalne

A fractal dimension is an index for characterizing fractal patterns or sets by quantifying their complexity as a ratio of the change in detail to the change in scale. Fractal dimension measures complexity, a concept related to certain key features of fractals: self-similarity and detail or irregularity.

Istnieje wiele definicji wymiaru fraktalnego, w tym wymiar topologiczny, wymiar Hausdorffa, wymiar samopodobieństwa, wymiar pudełkowy, itp. Ich wspólną cechą jest istnienie relacji pomiędzy współczynnikiem redukcji a liczbą pomniejszonych fragmentów, na które rozpada się obiekt. Można to przedstawić wzorem

$$D = \frac{\log(a)}{\log(1/s)}$$

gdzie: a – liczba pomniejszonych fragmentów na które rozpada się obiekt, s – współczynnik redukcji, D – wymiar samopodobieństwa.

Wymiar cyrkłowy (caliper dimension)

Wymiar jest jedną z miar samopodobieństwa krzywej fraktalnej. Przedstawia nachylenie wykresu logarytmów liczby kroków potrzebnych na przejście wzdłuż mierzonej krzywej względem ustawionego odstepu cyrkla (kroku) ze znakiem minus .

Wymiar pudełkowy (box counting dimension)

Pojęcie to służy do charakteryzowania zupełnie dowolnej struktury, niekoniecznie fraktalnej. Umożliwia systematyczny pomiar na płaszczyźnie, który łatwo zaadoptować do struktur w przestrzeni trójwymiarowej. Polega na nakryciu interesującego nas obiektu zbiorem kostek (kwadratów w przypadku płaszczyzny, sześcianów w przypadku przestrzeni trójwymiarowej) o bokach równych ε i zwyczajnie zliczaniu liczby kostek, które zawierają fragmenty badanego obiektu. Otrzymana liczba N_1 kostek takiego zliczania ściśle zależy od długości boku pojedynczej kostki ε , stąd oznaczmy ten wynik jako $N_1(\varepsilon)$. W kolejnych krokach zmniejszamy stopniowo ε otrzymując tym samym nowe wyniki N_2, N_3 , itd. Następnie sporządzamy wykres określony zależnością:

$$\log(N(\varepsilon)) = f\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

po czym do otrzymanych punktów dopasowujemy prostą i mierzymy jej nachylenie D . Uwzględniając, że wymiar pudełka ε jest odwrotnie proporcjonalny do ich liczby s^2 , które zmieszczą się na badanym obszarze linii wzór ten można zapisać również w postaci

$$D = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log(N(s))}{\log(s)}$$

Otrzymana wartość D to *wymiar pudełkowy*.

Przykład 10.1

Rozpatrzmy przykładowy kształt linii przedstawiony na rys. 10.7

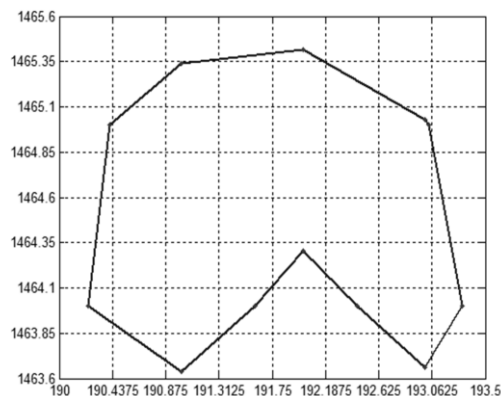


Fig.10.7 Przykład brzegu obszaru ilustrujący przypadek $N(s)$ dla $s=8$

Dla $s=8$ definiuje się macierz binarną 8×8 określającą pozycje kwadratów w których krzywa częściowo zawiera się

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ich liczba jest równa $N(s) = 32$. Zmieniając liczbę pudełek na obrazie otrzymuje się różne wartości $N(s)$, pokazane w tabeli 10.1.

Tabela 10.1 Zmiana wartości $N(s)$ jako funkcja s

s	4	8	16	32	64
$N(s)$	14	32	65	134	267

Rys. 10.8 przedstawia zależność $N(s)$ w skali logarytmicznej. Jest ona opisana funkcją liniową (aproksymacja) o postaci

$$\log(N(s)) = 1.2215 + 1.0573 \log(s) + \Delta$$

Nachylenie krzywej to wymiar pudełkowy $D=1.0573$.

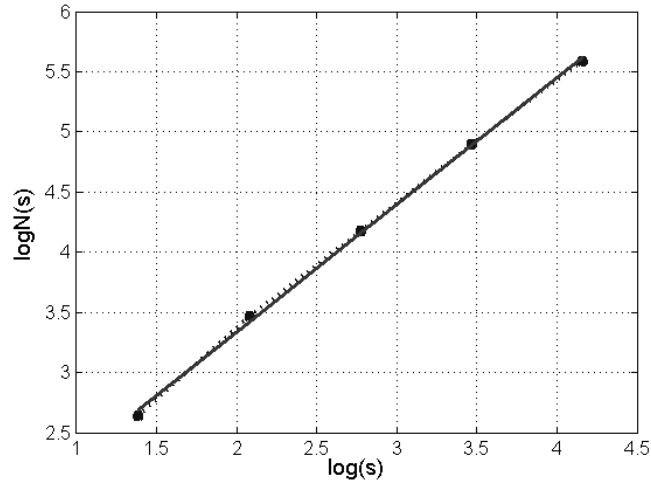
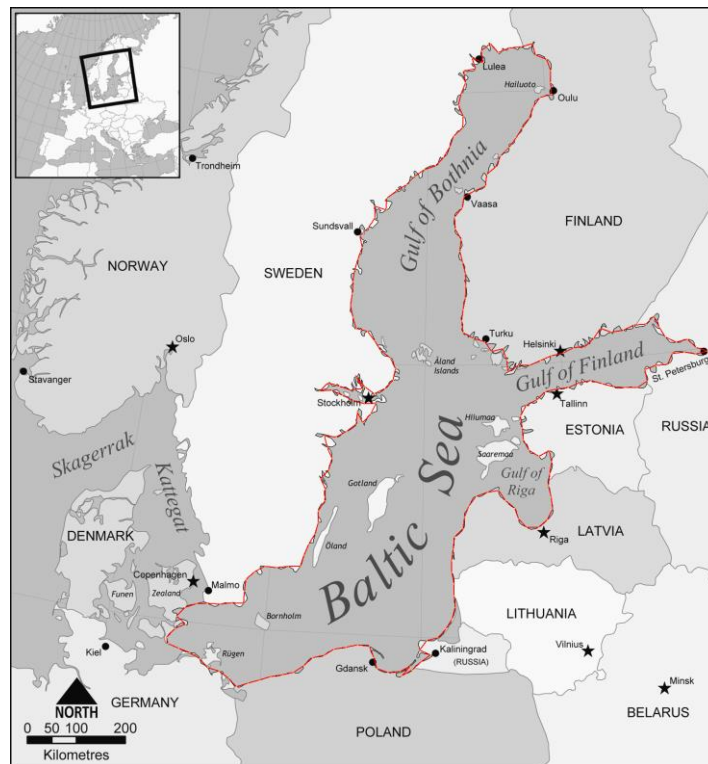


Fig.10.8 Zależność $N(s) = f(s)$ w skali logarytmicznej i jej aproksymacja liniowa

Przykład 10.2

Linia brzegowa Bałtyku w wymiarze fraktalnym (rys. 10.9).

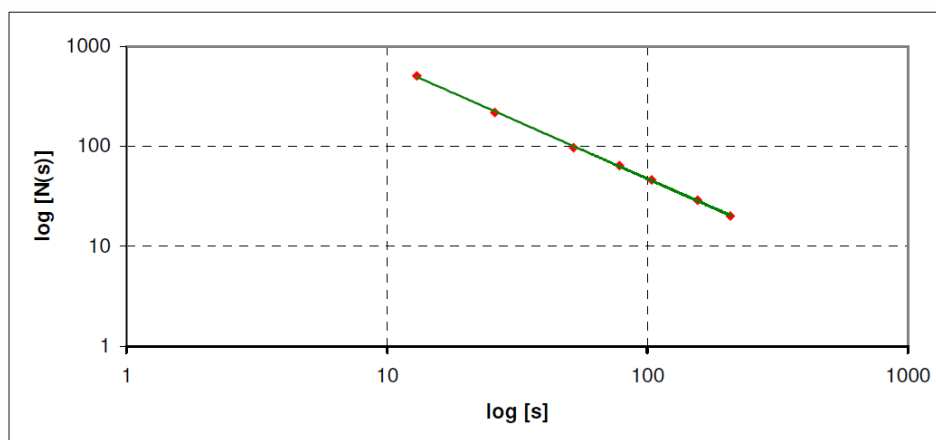


Rys. 10.9 Aproksymacja wybrzeża Bałtyku za pomocą fraktali

Tablica 10.2 Wyniki pomiaru cyrklowego dla wybrzeża Bałtyku

Rozstaw cyrkla s [km]	Liczba kroków N(s)	Uzyskana długość wybrzeża	Wymiar cyrkłowy
200	20	4000	1.15
150	29	4350	
100	46	4600	
75	64	4800	
50	97	4850	
25	218	5450	
12	505	6060	

Wykres zależności liczby kroków od długości s przedstawia rys. 10.10.



Rys. 10.10 Zależność logarytmiczna N(s) od wartości kroku s

10.3 Przykład układu chaotycznego Lorentza

Atraktory w układach liniowych są zwykle punktami lub okręgami. W układach chaotycznych pojawiają się **dziwne atraktory (fraktale)** – o bardzo złożonej o dużym podobieństwie budowy w różnej skali. Jednym z najsłynniejszych przykładów jest trójwymiarowy atraktor Lorentza, przypominający kształtem motyla.

W badaniu własności chaosu rozwinięto wiele technik w zakresie analizy równań różniczkowych oraz wykorzystano w nowy sposób wiele istniejących narzędzi matematycznych. Na potrzeby symulacji komputerowych dla układów chaotycznych korzysta się z **przekrojów**

Poincarégo, umożliwiającą zmniejszenie wymiaru przestrzeni fazowej. Następnie z własności tych przekrojów wnioskuje się na temat własności pełnej przestrzeni fazowej rozwiązań.

Układ Lorenza – przedstawiony przez Edwarda Lorenza w 1963 roku to układ trzech nieliniowych równań różniczkowych modelujący w możliwie najprostszy sposób zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze. Dla pewnego zbioru parametrów układ zachowuje się chaotycznie, a wykres zmiennych w przestrzeni fazowej przedstawia dziwny atraktor (tzw. *atraktor Lorenza*).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (10.1)$$

gdzie:

σ – liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka,

r – liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka,

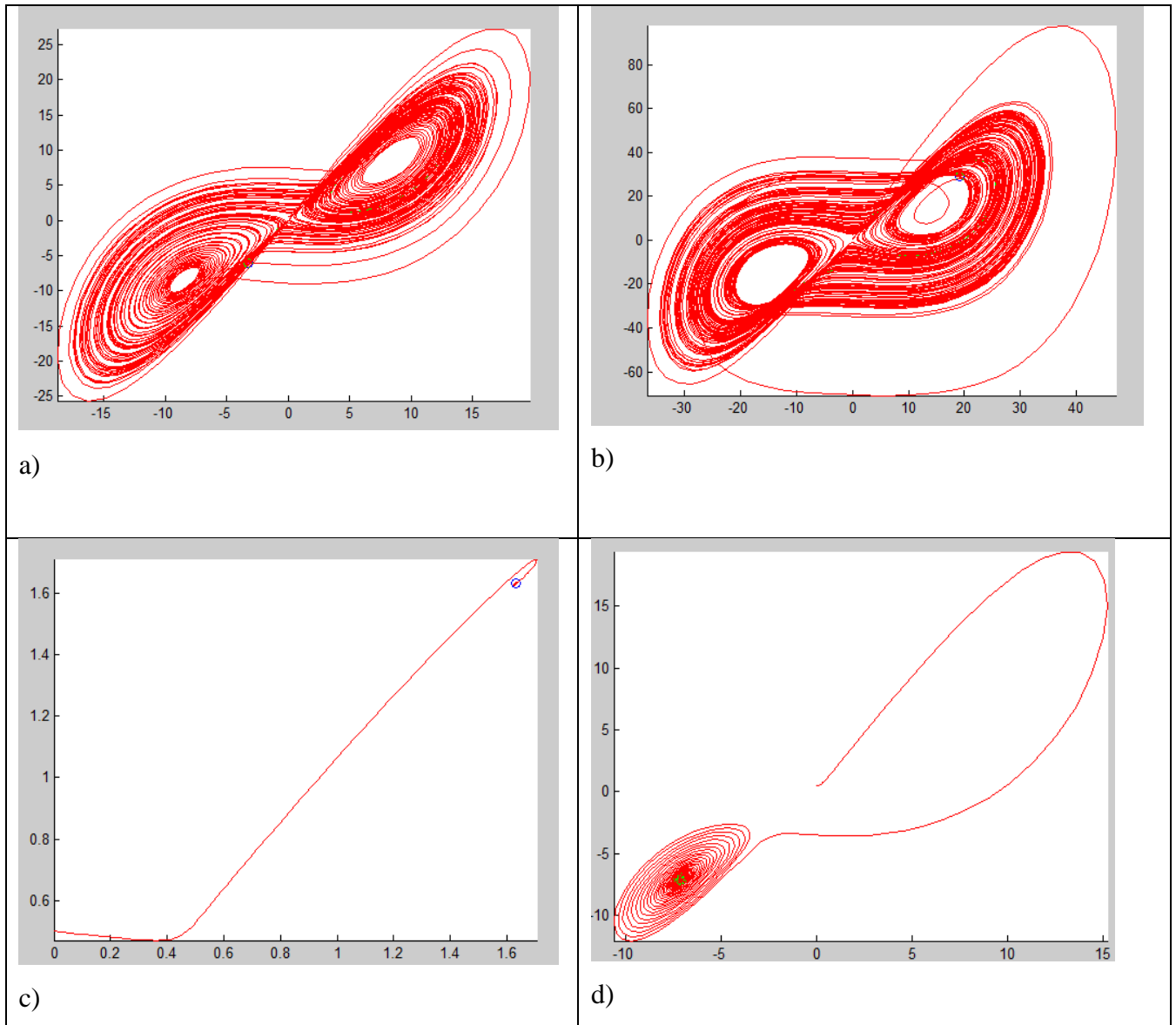
b – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny.

Stałe σ , r i b są dodatnie, ale zwykle $\sigma = 10$, $b = 8/3$, a r jest zmienne. Układ przejawia chaos dla pewnych wartości r , na przykład $r = 28$, $r=99$, itd.

Poniżej podany jest kod źródłowy napisany w środowisku MATLAB, który rozwiązuje omawiany układ równań oraz prezentuje wynik w postaci animacji:

```
% układ równań różniczkowych
sigma = 10;
r = 99;
b = 8/3;
dy = @(t,y)[sigma*(y(2)-y(1));
            -y(1)*y(3)+r*y(1)-y(2);
            y(1)*y(2)-b*y(3)];
% rozwiązanie układu
[t,y] = ode45(dy,[0 100],[0 0.5 1]);
% rysowanie wyniku
comet(y(:,1),y(:,2))
figure
comet3(y(:,1),y(:,2),y(:,3))
```

Na rys. 10.11 przedstawiono atraktory Lorentza dla kilku różnych wartości $r=28$, $r=99$, $r=2$ i $r=20$.



Rys. 10.11 Atraktory Lorentza w przestrzeni 2-wymiarowej dla a) $r=28$, b) $r=99$, c) $r=2$, d) $r=20$. Przypadki a i b reprezentują dziwne atraktory (układ chaotyczny), w pozostałych przypadkach trajektoria dąży do stanu stałego.

W przypadku wystąpienia chaosu ($r=28$ i $r=99$) widzimy dwie powierzchnie (skrzydła motyla), po których trajektorie poruszają się ruchem spiralnym na zewnątrz. Kiedy odległość od środka jednej spirali staje się większa niż pewien określony próg, rozwiązanie jest wyrzucane z tej spirali i przyciągane do drugiej, gdzie znowu zaczyna wędrować ruchem spiralnym na zewnątrz i tak dalej. Liczby takich spiralnych iteracji jakie orbita spędza w jednej spirali a później w drugiej, potraktowane jako ciąg liczbowy nie wykazują żadnej regularności (ta własność zależy ściśle od wyboru trajektorii). Nawet przy wyborze dwóch bardzo bliskich punktów startu, albo nawet tego

samego punktu startu, ale obliczenia wykonamy na dwóch komputerach, wówczas ciągi te różnią się między sobą od pewnego miejsca. Tu właśnie ujawnia się chaos i ogromna wrażliwość na parametry obliczeniowe i warunki początkowe.

10.4 Wykładniki Lapunowa

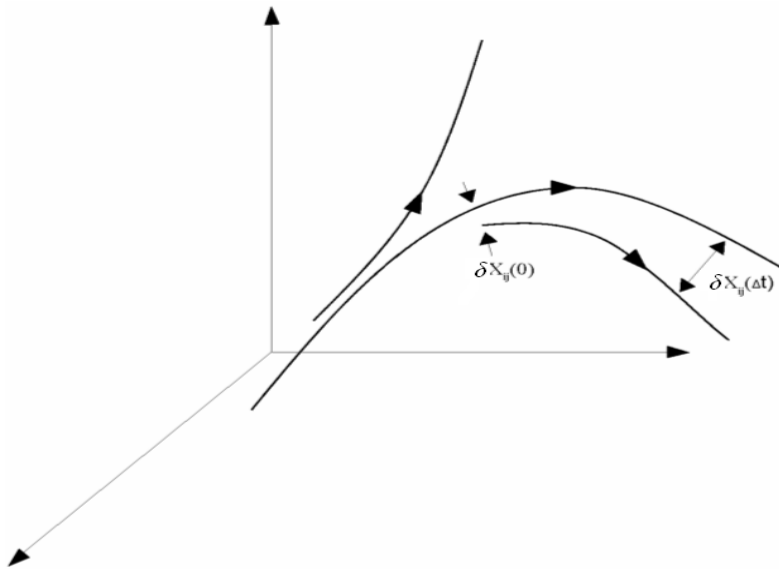
Intuicyjnie chaotyczność może być rozumiana jako wrażliwość systemu (nieliniowego układu dynamicznego) na warunki początkowe. Jeśli w wyniku obserwacji zachowania się pewnego układu startującego kilka razy z podobnych warunków (bliskich sobie stanów) początkowych, obserwujemy drastyczne rozbieżności w stanach końcowych układu – możemy powiedzieć, że system cechuje się zachowaniem chaotycznym.

Jeśli wprowadzimy wielowymiarowy układ współrzędnych, gdzie wszystkim interesującym wielkościom opisującym stan układu odpowiadać będą osobne osie współrzędnych, wówczas będziemy mogli postrzegać poszczególne stany systemu jako *wektory stanu w przestrzeni fazowej*. Zachowaniu się (zmianom stanu) obserwowanego układu towarzyszyć będzie wówczas kreślenie pewnych dróg - *trajektorii* w przestrzeni fazowej. Chaotyczne zachowanie systemu będzie wówczas miało swoje odzwierciedlenie w niestabilnych zmianach odległości pomiędzy poszczególnymi trajektoriami. Wektory stanu bliskie sobie początkowo w przestrzeni fazowej, przemieszczając się po swoich trajektoriach po pewnym czasie ewolucji, zmieniają swoje położenie. Zmianie ulegnie również wzajemna odległość wektorów tożsama z odległością trajektorii fazowych wektorów w określonym momencie (po czasie ewolucji). Za jedną z lepszych miar chaotyczności uważa się wykładniki Lapunowa [26,79].

Wykładniki Lapunowa określają względny stopień rozbiegania się (lub zbiegania) bliskich sobie trajektorii fazowych w przestrzeni stanu. Zmiana trajektorii wynikająca z istnienia wykładnika Lapunowa może być zapisana w postaci:

$$d(t) = d_0 e^{Lt} \quad (10.2)$$

gdzie d_0 oznacza początkową odległość trajektorii a L - wykładnik. Ilustracja zachowania się systemu chaotycznego w przestrzeni stanów została przedstawiona na rys. 10.12. Każdy system, który zawiera przynajmniej jeden wykładnik o wartości dodatniej, jest uważany za chaotyczny, co oznacza że przy jego istnieniu dwie trajektorie bardzo bliskie sobie w chwili początkowej, rozbiegają się w miarę upływu czasu.



Rys. 10.12. Ilustracja zmian trajektorii fazowych procesu chaotycznego

Przyjmując skończone i odpowiednio małe odcinki czasu, ewolucję układu dynamicznego można opisać również rekurencyjnym równaniem algebraicznym:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$$

gdzie: - przyjmuje kolejne wartości całkowite, które można uznać za kolejne interwały czasowe, zmienną opisującą stan układu dynamicznego w chwili Ciąg kolejnych iteracji tworzy orbitę odwzorowania. Jeżeli rozpatrzeć dwa stany początkowe różniące się w niewielkim stopniu o ε , to po upływie iteracji otrzymuje się wartości $f^n(x_0)$ gdzie f^n oznacza n-tą iterację startującą z punktu x_0 . Formalnie wykładnik Lapunowa definiowany jest w postaci

$$L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| \quad (10.3a)$$

- $L < 0$ oznacza, że trajektoria zmierza do stabilnego punktu lub staje się orbitą periodyczną.
- zmierza do neutralnego, stałego punktu. System znajduje się w najbardziej stabilnym stadium rozwoju.
- jest niestabilna i chaotyczna. Dwa bliskie stany początkowe oddalają się wykładniczo od siebie z upływem czasu.

W teorii chaosu bada się zwykle średni stopień wykładniczego rozbiegania się dwu sąsiednich trajektorii, korzystając z definicji wykładnika Lapunowa w postaci:

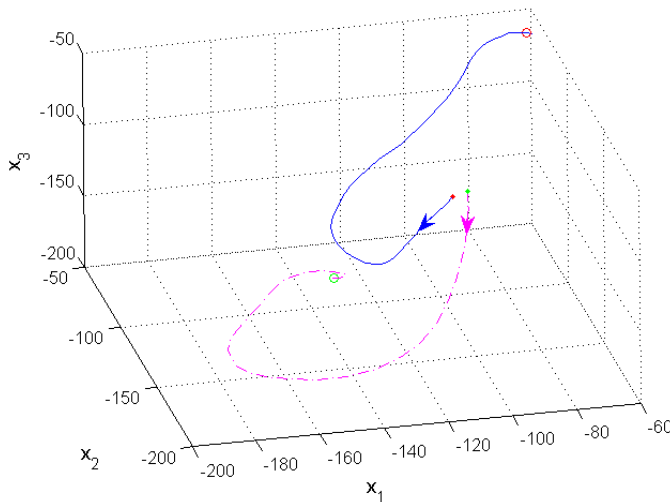
$$L_i = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty, \Delta x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\|\Delta X_{i,j}(X_0, \Delta t)\|}{\|\Delta X_0\|} \quad (10.3b)$$

Wykorzystanie praktyczne wzoru (10.3) jest stosunkowo trudne ze względu na warunki graniczne. W praktyce korzysta się ze wzorów estymacyjnych bazujących na badaniu odległości dwu trajektorii w wybranych chwilach czasowych.

Jeśli odległość początkową dwóch bliskich (w sensie odległości w przestrzeni fazowej), sobie stanów jednak na tyle dalekich w sensie czasowym, aby można było rozważać je jako punkty na sąsiednich trajektoriach, oznaczmy w postaci $\delta \mathbf{x}_{ij}(0)$, zaś odległość tę po czasie ewolucji Δt jako $\delta \mathbf{x}_{ij}(\Delta t)$ to lokalny estymator wykładnika Lapunowa można wyrazić w postaci wyrażonej w bitach na sekundę [26]

$$L = \log_2 \frac{\delta \mathbf{x}_{ij}(\Delta t)}{\delta \mathbf{x}_{ij}(0)} \quad (10.4)$$

Wykładnik Lapunowa tak zdefiniowany jest miarą wykładniczego rozbiegania się trajektorii w miarę upływu czasu ewolucji bliskich sobie początkowo trajektorii w przestrzeni fazowej.



Rys 10.13 Ilustracja przebiegu dwu trajektorii fazowych odpowiadających przykładowym zmianom sygnału EEG

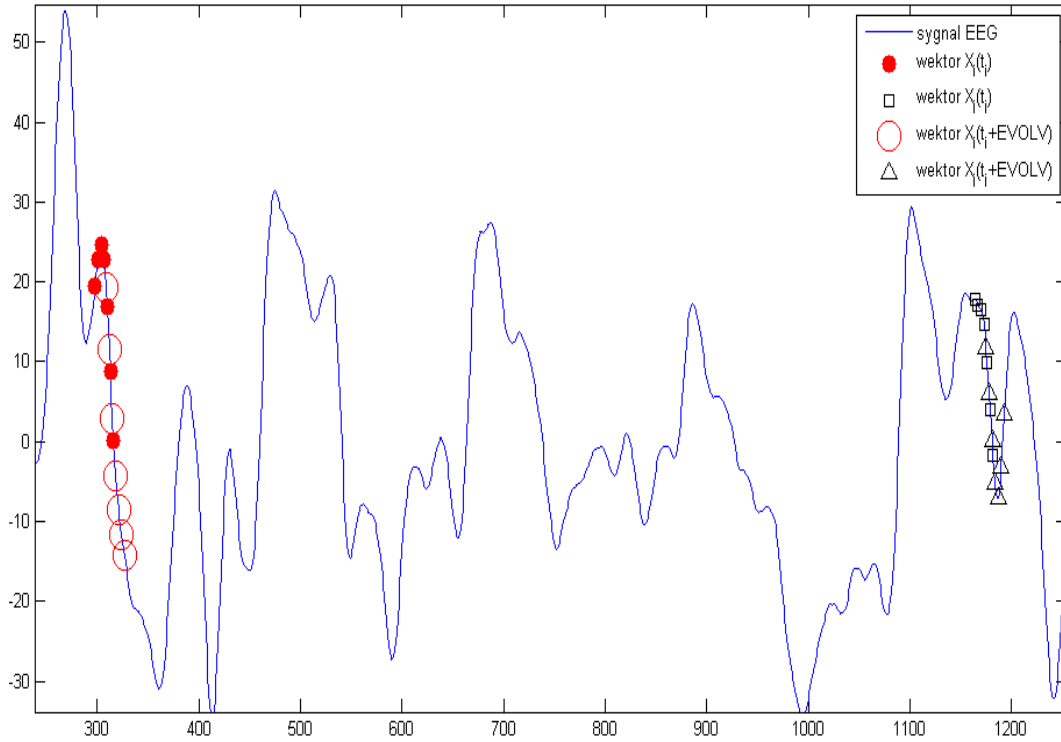
Dla przestrzeni N-wymiarowej istnieje N wykładników Lapunowa, po jednym dla każdego z kierunków w przestrzeni fazowej. Na to, aby układ można było uznać za chaotyczny, wystarcza aby choć jeden z wykładników Lapunowa był dodatni. W praktyce ograniczamy się zwykle do

największego wykładnika Lapunowa, jako miary chaotyczności, gdyż taka estymata jest zwykle najbardziej stabilna w sensie wartości i najłatwiejsza do uzyskania w praktyce.

Na rys 10.13 przedstawiono przykładowe 2 trajektorie sygnału EEG w przestrzeni trójwymiarowej rozpoczynające się blisko siebie. W wyniku ewolucji po pewnym czasie Δt punkty obu trajektorii znalazły się daleko od siebie. Widoczny jest proces stopniowego rozbiegania się obu trajektorii. Punkty końcowe obu trajektorii położone są w przestrzeni bardzo daleko od siebie.

Zadanie estymacji wykładnika Lapunowa dla szeregu czasowego wymaga zdefiniowania przestrzeni fazowej, czyli określenia, jakie (i ile składowych \rightarrow wymiar p) wielkości charakteryzują jej stan a także wyznaczenia wartości p . Odstęp czasowy τ między wartościami tworzącymi wektor \mathbf{x} w przestrzeni fazowej można dobrać w różny sposób na przykład na podstawie pierwszego miejsca zerowego funkcji autokorelacji, minimum informacji wzajemnej (*mutual information*) czy też zerowania się momentów wyższych rzędów [29]. Podobnie istnieje wiele metod szacowania wymiaru przestrzeni stanu p . Często przyjmuje się, że wartość p powinna spełniać warunek $p \geq 2D+1$, przy czym D jest wymiarem korelacyjnym [29]. Przyjęcie stałych wartości powyższych parametrów przy estymacji wykładników Lapunowa stanowi znaczne uproszczenie, jednak ewidentną korzyścią jest wówczas prostota algorytmu.

Na rysunku 10.14 przedstawiono przykładowy wybór składowych pary wektorów: bieżącego wektora \mathbf{x}_i i wektora kandydującego \mathbf{x}_j , oraz ich odpowiedników po czasie ewolucji $\Delta t = \text{EVOLV}$, dla fragmentu przebiegu sygnału EEG traktowanego jako sygnał chaotyczny. Oś x oznaczona jest w postaci kolejnych punktów czasowych sygnału EEG. Odległość między dwoma punktami wynika z zastosowania częstotliwości próbkowania (tutaj $f_s = 250$ punktów na sekundę). Oś y wyrażona jest w μV . W tym przypadku wymiar wektora stanu \mathbf{x} przyjęto równy 7.



Rys. 10.14 Objaśnienie sposobu tworzenia wektorów w przestrzeni stanu. Kropki w kolorze czerwonym oznaczają punkty wektora $\mathbf{x}(t_i)$ a kółka w tym samym kolorze punkty po czasie ewolucji Δt . Punkty w kształcie kwadratów wyznaczają składowe wektora $\mathbf{x}(t_j)$, a punkty w kształcie trójkątów oznaczają kolejne składowe wektora $\mathbf{x}(t_j + \Delta t)$ po czasie ewolucji Δt .