

MULTIMETRY

1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Wielkość mierzona - właściwość zjawiska, ciała lub substancji, którą można rozróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo.

Wartość wielkości - wyrażenie wielkości w postaci liczby i odpowiedniej jednostki miar.

Jednostka miary - umownie przyjęta wartość jednostkowa wielkości.

Pomiar - zespół czynności mających na celu wyznaczenie wartości wielkości; polega na porównaniu wielkości mierzonej z wzorcem tej wielkości i wyznaczeniu ilościowej relacji między nimi. Pomiar wykonywane są za pomocą przyrządów pomiarowych.

Wzorzec miary - przyrząd pomiarowy odtwarzający jednostkę miary wielkości; może też odtwarzać inne wartości.

Wynik pomiaru - wartość wielkości otrzymana w czasie pomiaru; odczyt wskazania przyrządu nazywa się wynikiem surowym.

(Nie)dokładność pomiaru - terminy zwykle stosowane w znaczeniu ogólnym, wyrażające sto-procent zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą (poprawną) wielkości mierzonej. Ścisłą ocenę niedokładności pomiaru można wykonać dwoma sposobami: tradycyjnym - opartym na pojęciu błędu granicznego lub obecnie zalecanym - opartym na pojęciu niepewności standardowej.

Pomiar metodą bezpośrednią - wynik pomiaru uzyskany bezpośrednio ze wskazań przyrządu pomiarowego (np. pomiar napięcia woltomierzem).

Pomiar metodą pośrednią - wynik pomiaru uzyskany z pomiarów innych wielkości, powiązanych formalnym związkiem z wielkością mierzoną (np. pomiar rezystancji metodą woltomierza i amperomierza, gdzie wynik pomiaru określa prawo Ohma: $R = U/I$).

2. ODCZYT WSKAZANIA PRZYRZĄDU ANALOGOWEGO

Dobór odpowiedniego przyrządu wskazówkowego musi uwzględniać jego rodzaj, zakres pomiarowy i klasę dokładności. W przypadku stosowania woltomierzy i amperomierzy - szczególnie wtedy, gdy obiekt pomiaru jest małej mocy- nie do pominięcia jest też ocena ich rezystancji wewnętrznych.

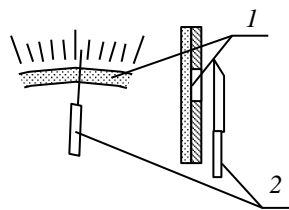
Przed przystąpieniem do pomiarów przyrządem wskazówkowym zawsze należy w nim sprawdzić położenie zerowe wskazówki i ewentualnie przeprowadzić czynności zerowania.

W przyrządach wielozakresowych i wielofunkcyjnych (tzw. **multimetrach**), przed włączeniem ich do obwodu należy nastawić właściwą funkcję pomiarową i dobrać odpowiedni zakres pomiarowy.

Wadą przyrządów analogowych jest możliwość niedokładnego odczytu wartości wskazywanej przez urządzenie odczytowe przyrządu. Urządzenie to składa się z podzielni, na której naniesiona jest podziałka oraz wskazówki - materialnej (rys.1) lub świetlnej (rys.3).

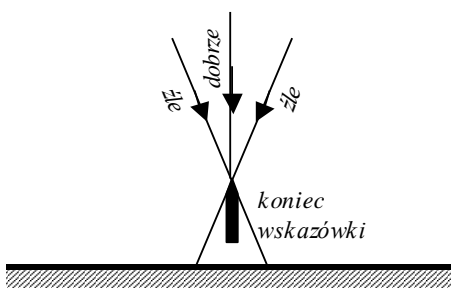
Podziałka jest to uporządkowany zbiór znaków (najczęściej kresek - **wskazów**). Dla ułatwienia odczytu niektóre z tych znaków mogą być opisane cyframi. Część podziałki między sąsiednimi wskazami nazywamy **działką elementarną**. Inne znaczenie ma **działka obliczeniowa** lub krótko działka podziałki. O liczbie działek obliczeniowych informują opisy liczbowe stanowiące **ocyfrowanie podziałki** i najczęściej jest ona różna od liczby działek elementarnych. Długość podziałki oraz liczba działek są ściśle zależne od klasy oraz gabarytów miernika. Im klasa wyższa tym podziałka dłuższa, a liczba działek większa.

Charakterystyczną cechą przyrządów analogowych jest **zdolność rozdzielcza**, która określa najmniejszą część działki możliwą do odczytania. W zależności od odległości między sąsiednimi wskazami, przyjmuje się, że zdolność rozdzielcza wynosi 0,5, 0,2 lub 0,1 mm (działki). Przyjęcie zbyt małej zdolności rozdzielczej zwiększa błąd odczytu.



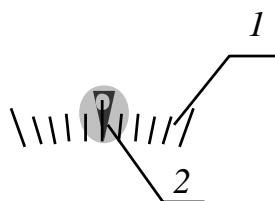
Rys.1. Wskazówka nożowa i skala lustrzana: 1 – lustro, 2 – wskazówka

Błąd odczytu ma charakter błędu przypadkowego i jest zależny przede wszystkim od staranności eksperymentatora. Przy pomiarach jednokrotnych błąd taki jest trudny lub wręcz niemożliwy do oszacowania. Błąd odczytu może zostać także popełniony, jeśli eksperymentator nie patrzy na wskazówkę prostopadłe do płaszczyzny podzielnicy. Jest to błąd krzywego patrzenia, nazywany także **błędem paralaksy**. Istotę tego błędu przedstawia rys. 2.



Rys.2. Sposób powstawania błędu paralaksy.

Błąd paralaksy można wyeliminować patrząc na wskazówkę prostopadłe do podzielnicy. Ułatwia to umieszczone pod wskazówką lustreczko (rys.2) lub stosowanie wskazówki świetlnej (rys.3). **Wskazówka świetlna** powstaje na zasadzie odbicia światła z żarówki od lustreczka, na którym jest naniesiony znacznik wskazówki. Lustreczko jest przymocowane do osi, której kąt odchylenia od położenia równowagi zależy od wartości wielkości mierzonej. Przemieszczająca się wzdłuż podziałki plamka uniemożliwia powstanie błędu paralaksy, ponieważ cień wskazówki znajduje się bezpośrednio na podzielnicy.



Rys.3. Skala i wskazówka świetlna: 1 – podziałka, 2 – plamka świetlna ze znacznikiem wskazówki

Odczytów wartości wskazań przyrządów wskazówkowych dokonuje się **bezpośrednio** w jednostkach wielkości mierzonej lub **pośrednio** przez odczyt liczby działek odchylenia wskazówki.

Jednym z podstawowych parametrów przyrządów analogowych (wskazówkowych) jest stała przyrządu. Jeżeli przyrząd jest wyposażony we wskaźnik, który ma naniesioną podziałkę liniową, to stała przyrządu jest równa stałej podziałki.

Stać podziałki jest to stosunek wartości nominalnej podzakresu pomiarowego X_N do maksymalnej liczby działek na podziałce przyrządu α_{\max} .

$$S = \frac{X_N}{\alpha_{\max}}$$

W przyrządach o podziałce liniowej odczytu wartości mierzonej dokonuje się mnożąc liczbę działek α , o którą wychyliła się wskazówka przyrządu od położenia początkowego przez stałą podziałki S . Wynik pomiaru będzie więc równy

$$X_x = X_m = \alpha \cdot S = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} X_N$$

Wartości α_{\max} i α mogą być odczytywane w działkach elementarnych lub obliczeniowych ale nie można mieszać działek obliczeniowych z elementarnymi.

Jeżeli przyrząd ma podziałkę silnie nieliniową (różne odległości między kolejnymi działkami), to należy określić **stałą fragmentu podziałki**. Taka sytuacja zachodzi w omomierzach analogowych. Przyjmuje się założenie, że na podziałce nieliniowej można określić pewne przedziały, w których jest ona liniowa. Na ogół granice takich przedziałów są opisane działkami oznaczonymi liczbowo. Wynik pomiaru będzie równy

$$X_m = \alpha' \cdot S' + X_{\min} = \frac{\Delta X}{\Delta \alpha} \alpha' + X_{\min}$$

gdzie:

α' – liczba działek, o które odchyliła się wskazówka od początku rozpatrywanego przedziału;

$\Delta \alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ – szerokość przedziału liniowego w działkach;

$\Delta X = X_{\max} - X_{\min}$ przyrost wartości wielkości mierzonej powodującej zmianę położenia wskazówki od położenia α_{\min} do α_{\max} .

Z reguły w przyrządach analogowych o nieliniowej podziałce podzakres pomiarowy określany jest nie za pomocą wartości maksymalnej lecz poprzez mnożnik podzakresu. Wówczas, wykorzystanie ocyfrowania podziałki przy określaniu położenia wskazówki, czyli odczyt jej wychylenia w działkach obliczeniowych, znacząco ułatwia wyznaczenie wartości zmierzonej przy nieliniowej podziałce. W takim przypadku wystarczy tylko pomnożyć odczytaną liczbę działek obliczeniowych, określających wychylenie wskazówki przez mnożnik ustawionego podzakresu pomiarowego.

Przyrządy cyfrowe są wygodniejsze w użyciu. Dzięki zastosowaniu wyświetlacza cyfrowego nie popełnia się subiektywnych błędów związanych z odczytem wskazań.

3. ROZDZIELCZOŚĆ POMIARU

Jest w pomiarach ważną wielkością, gdyż wynika z niej tzw. **błąd rozdzielczości**, wpływający na dokładność pomiarów. Rozdzielczość pomiaru jest wyrażana w jednostkach wielkości mierzonej i określa najmniejszą zmianę wartości mierzonej, na którą reaguje przyrząd. Dla przyrządów wielozakresowych rozdzielczość zależy od zakresu pomiarowego na którym wykonywany jest pomiar. Jest regułą, że im mniejszy zakres pomiarowy, tym „większa” rozdzielczość (jest rozróżniana mniejsza wartość).

Dla przyrządu wskazówkowego rozdzielczość pomiaru zależy od przyjętej w trakcie pomiaru rozdzielczości odczytu.

Przykład. 1: Pomiar przyrządem wskazówkowym na zakresie $U_z = 10 \text{ V}$, przy maksymalnej liczbie działek $\alpha_{\max} = 100 \text{ dz}$ i rozdzielczości odczytu $\Delta_o \alpha = 0,2 \text{ dz}$, ma rozdzielczość:

$$\Delta_r U = \frac{U_z}{\alpha_{\max}} \cdot \Delta_o \alpha = \frac{10 \text{ V}}{100 \text{ dz}} \cdot 0,2 \text{ dz} = 0,02 \text{ V}$$

Dla przyrządów cyfrowych rozdzielczość pomiaru jest określona wartością jednostki (kwantu) wielkości mierzonej, wskazywanej przez ostatni wskaźnik pola odczytowego.

Przykład. 2: Dla wskazania 126,6 V przyrząd ma rozdzielczość $\Delta_r U = 0,1 \text{ V}$;

Przykład. 3: Dla wskazania 75,36 mV przyrząd ma rozdzielczość $\Delta_r U = 0,01 \text{ mV} = 10 \mu\text{V}$.

4. ROZDZIELCZOŚĆ CYFROWA PRZYRZĄDU POMIAROWEGO

Parametrem charakteryzującym wyłącznie przyrząd cyfrowy jest rozdzielczość cyfrowa, określająca maksymalną liczbę cyfr znaczących wyświetlanego wyniku, niezależnie od wybranego podzakresu pomiarowego. W przypadku multimetrów rozdzielczość cyfrowa przyrządu może być różna dla różnych funkcji pomiarowych. Rozdzielczość cyfrowa przyrządu może być wyrażona liczbą całkowitą lub liczbą mieszaną, której część ułamkowa może wynosić $\frac{1}{2}$ lub $\frac{3}{4}$. W przypadku, gdy część ułamkowa wynosi $\frac{1}{2}$ to na najbardziej znaczącej pozycji wyświetlacza może zostać wyświetlone cyfry 0 lub 1 (czasami również 2), natomiast w sytuacji gdy część ułamkowa wynosi $\frac{3}{4}$ to na pozycji najbardziej znaczącej cyfry mogą zostać wyświetlone wartości 0, 1, 2, lub 3 (czasami również 4).

Przykład 1.

Jeżeli rozdzielczość cyfrowa woltomierza wynosi 4 cyfry to wynik pomiaru może mieć maksymalnie 4 cyfry znaczące, **nie oznacza to**, że każdy wynik pomiaru wykonanego tym woltomierzem będzie miał 4 cyfry znaczące. Na danym podzakresie pomiarowym rozdzielczość pomiaru będzie taka sama, czyli np. na zakresie 5 V możemy otrzymać następujące wyniki: 4,345 V (4 cyfry znaczące); 0,654 V (3 cyfry znaczące); 0,076 V (2 cyfry znaczące) itp. Uzyskane wyniki zapisane są różną liczbą cyfr znaczących ale ich rozdzielczość jest taka sama i wynosi 0,001 V.

Przykład 2.

Jeśli rozdzielczość przyrządu wynosi $5 \frac{1}{2}$ cyfry oznacza to, że w wyniku pomiaru na pięciu mniej znaczących pozycjach wyświetlacza mogą wystąpić cyfry od 0 do 9 natomiast na najbardziej znaczącej (szóstej) pozycji – wyłącznie wartości 0 lub 1 (ewentualnie 2).

Przykład 3.

Jeśli rozdzielczość przyrządu wynosi $4 \frac{3}{4}$ cyfry oznacza to, że w wyniku pomiaru na czterech mniej znaczących pozycjach wyświetlacza mogą wystąpić cyfry od 0 do 9 natomiast na najbardziej znaczącej (piątej) pozycji – wyłącznie wartości 0, 1, 2, 3 (ewentualnie 4).

Wyróżnia się również pojęcie rozdzielczości cyfrowej wyświetlacza, która również informuje o tym iloma maksymalnie cyframi znaczącymi może zostać wyświetlony wynik pomiaru. Jednak zapisywana jest ona tylko liczbami całkowitymi, czyli np. przy rozdzielczości cyfrowej przyrządu wynoszącej $4 \frac{3}{4}$ rozdzielczość cyfrowa wyświetlacza powinna wynosić 5 cyfr, po to aby wszystkie cyfry znaczące wyniku pomiaru mogły zostać wyświetlone.

5. LICZBY PRZYBLIŻONE, CYFRY ZNACZĄCE LICZBY

Skutkiem ograniczonej dokładności przyrządów pomiarowych wynik pomiaru jest liczbą przybliżoną, mającą określoną dokładność. Wartości uzyskane bezpośrednio z odczytów lub na podstawie obliczeń są tzw. **wynikami surowymi**, czyli liczbami zwykle o zbyt dużej liczbie cyfr znaczących. Na liczbach tych należy przeprowadzić rachunek ich uproszczenia – inaczej mówiąc, należy je zaokrąglić.

O dokładności przybliżenia liczby świadczy liczba występujących w niej cyfr znaczących.

W zapisie dziesiętnym liczby, cyframi znaczącymi są jej wszystkie cyfry z pominięciem początkowych zer.

Przykład 1: Liczba 102,700 ma 6 cyfr znaczących

Przykład 2: Liczba 0,0123 ma 3 cyfry znaczące

Przykład 3: Liczba 1000,5 ma 5 cyfr znaczących

W praktyce może też wystąpić liczby (wartości) przybliżone, dla których nie można podać ścisłej liczby cyfr znaczących, czyli dokładności ich uproszczenia. Takimi są liczby całkowite z zerami na końcu, np. 3800, 9000, itp. Ich poszczególne zera mogą być cyframi znaczącymi lub nieznaczącymi.

Przykład 4: Liczba przybliżona 1000 może mieć 1, 2 lub 3 cyfry znaczące. Nie znając „historii” jej uproszczenia nie można tego jednoznacznie stwierdzić.

Chcąc wyeliminować tę niejednoznaczność należy taką liczbę przedstawić za pomocą zapisu potęgowego liczby 10 z wykładnikiem całkowitym (dodatnim lub ujemnym). Natomiast prawidłowy zapis wartości fizycznej, mającej jednostkę miary, powinien mieć odpowiednio dobraną wielokrotność lub podwielokrotność.

Przykład 5: Liczba 14000 przedstawiona 4 cyframi znaczącymi ma postać $1,400 \cdot 10^4$.

Przykład 6: Liczba 1000 w zapisie z 2 cyframi znaczącymi ma postać $1,0 \cdot 10^3$.

Przykład 7: Wartość 1500W z 3 cyframi znaczącymi ma postać 1,50 kW.

Przykład 8: Wartość 120A w zapisie z 2 cyframi znaczącymi ma postać 0,12 kA.

6. ZASADY UPRASZCZANIA LICZB - ZAOKRĄGLANIA

Zmniejszając liczbę cyfr znaczących w liczbie lub wartości uzyskuje się jej przybliżenie. O liczbie pominiętych cyfr znaczących decyduje pożądaną dokładność przybliżenia, która wynika z przyjętych kryteriów. Np. w zeznaniach podatkowych kwoty zaokrągla się do 1 złotego; w napiwkach uwzględnia się kwotę rachunku. Przy opracowaniu wyników pomiarów występują ścisłe reguły upraszczaniu liczb i wartości.

Reguła I

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest mniejsza niż 5, to liczba zaokrąglona pozostaje bez zmian.

Przykład 1: Liczbę 1263,5 uprościć do liczby z trzema cyframi znaczącymi.

Zapis potęgowy $1,2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1,26 \cdot 10^3$.

Przykład 2: Liczbę jw. uprościć do liczby z jedną cyfrą znaczącą.

Jest $1,2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1 \cdot 10^3$.

Przykład 3: Liczbę 0,750025 uprościć do liczby z 4 cyframi znaczącymi.

Wynik zaokrąglenia: 0,7500

Przykład 4: Liczbę 1,8205 uprościć do liczby z 2 cyframi znaczącymi.

Wynik zaokrąglenia: 1,8

Reguła II

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest większa niż 5, to ostatnią cyfrę liczby uproszczonej zwiększamy o 1.

Przykład 5: Liczbę 0,7635 zapisać z 1 cyfrą znaczącą. Wynik zaokrąglenia: 0,8

Przykład 6: Liczbę 126,8 przedstawić z 2 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 130 ; prawidłowy jej zapis: $1,3 \cdot 10^2$

Przykład 7: Wartość 996,52 Ω przedstawić z 2 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: 1,0 k Ω

Przykład 8: Wartość 1626,8 V przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: 1,63 kV

Reguła III

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5, a między kolejnymi cyframi znajdują się cyfry niezerowe, to ostatnią cyfrę liczby zaokrąglonej zwiększa się o 1.

Przykład 9: Wartość 12653,8 μH przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 12,7 mH

Przykład 10: Wartość 0,78658 kA przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 787 A

Przykład 11: Wartość 5,5200 nF przedstawić z 1 cyfrą znaczącą.
Wynik zaokrąglenia: 6 nF.

Reguła IV

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5, a wszystkie kolejne cyfry są zerami, to ostatnia cyfra liczby przybliżonej:

- pozostaje bez zmian, gdy jest parzysta,
 - zostaje zwiększona o 1, gdy jest nieparzysta.
- (zwyczajowo mówi się o zaokrągleniu „do parzystej”)

Przykład 12: Wartość 126500 V przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 126 kV

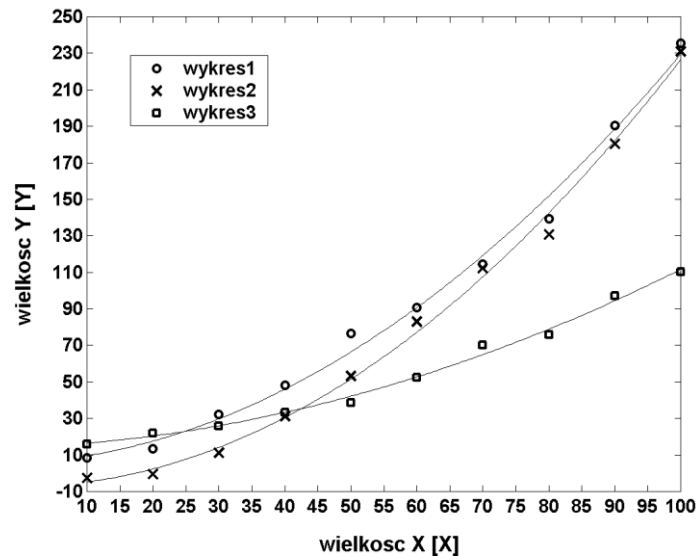
Przykład 13: Wartość 0,785500 W przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 0,786 W

7. ZASADY TWORZENIA WYKRESÓW

Wykresy sporządzanych zależności powinny być wykonane estetycznie, ręcznie przy pomocy krzywików lub w postaci wydruków na standardowych rozmiarach papierów. Wykresy wykonane ręcznie muszą być nanoszone na papier milimetrowy a wydruki komputerowe można robić na papierze gładkim.

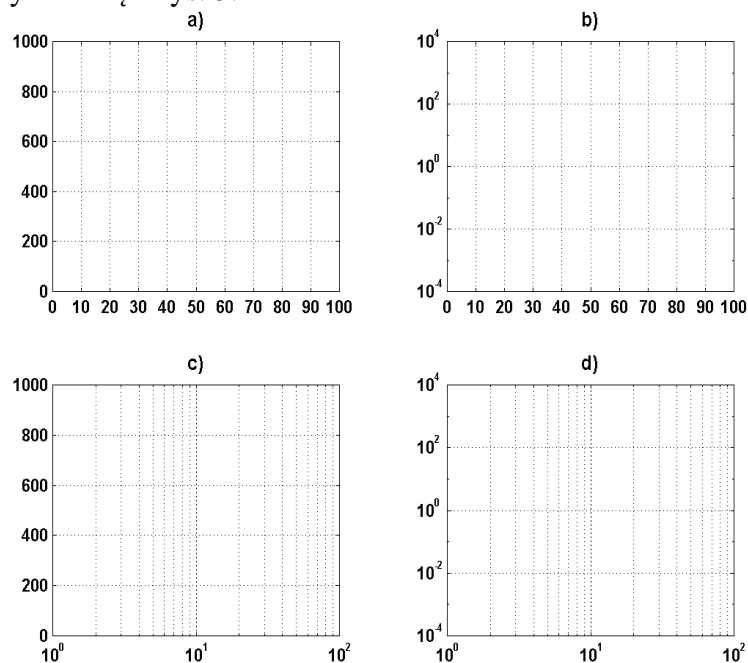
Każdy wykres powinien być zaopatrzony w opis zależności funkcyjnej oraz informację w jakich warunkach był „zdejmowany”. Osie wykresów powinny być oznaczone, tzn. powinny zawierać informację jakie wielkości są na nich odłożone oraz w jakich jednostkach są wykreślone ich wartości. Jeżeli na danym wykresie naniesiono kilka krzywych to należy je

wykreślić różnymi kolorami lub przy pomocy symboli np. •, o, x, *, itp. Wykres taki zawsze powinien być jednoznaczny – opis poszczególnych krzywych należy zawrzeć pod rysunkiem lub w legendzie – rys. 4.



Rys. 4. Przykład wykresu

Ogólnie dostępny papier milimetrowy reprezentuje tzw. siatkę liniowo-liniową. Oprócz siatki liniowej, w celu uwypuklenia charakterystycznych zmian interesującej nas zależności, stosuje się jeszcze siatki logarytmiczne: liniowo-logarytmiczną, logarytmiczno-liniową i logarytmiczno-logarytmiczną – rys. 5.



Rys. 5. Rodzaje siatek:

a) liniowa; b) liniowo-logarytmiczna; c) logarytmiczno-liniowa; d) logarytmiczno-logarytmiczna.

Siatka liniowo-logarytmiczna znajduje zastosowanie gdy zakres liczbowy wartości osi rzędnych (oś y) jest znaczny, tzn. poszczególne wartości y_i różnią się między sobą o rzędy

wielkości. Pozwala ona ponadto na sprawdzenie istnienia między dwiema wielkościami zależności typu

$$y = Ae^{ax}$$

gdzie A , a – stałe, gdyż linearyzuje jej wykres.

Podobnie, gdy wartości osi odciętych x charakteryzują się dużym zakresem zmian, wykorzystywana jest **siatka logarytmiczno-liniowa**. Dodatkowo pozwala na linearyzację zależności typu

$$y = A + alnx$$

gdzie A , a – stałe.

Siatkę logarytmiczno-logarytmiczną wykorzystuje się natomiast w sytuacji, gdy wartości na obu osiach charakteryzują się użymi zakresami zmian oraz do sprawdzania zależności typu $y = Ax^a$, gdzie A , a – stałe.

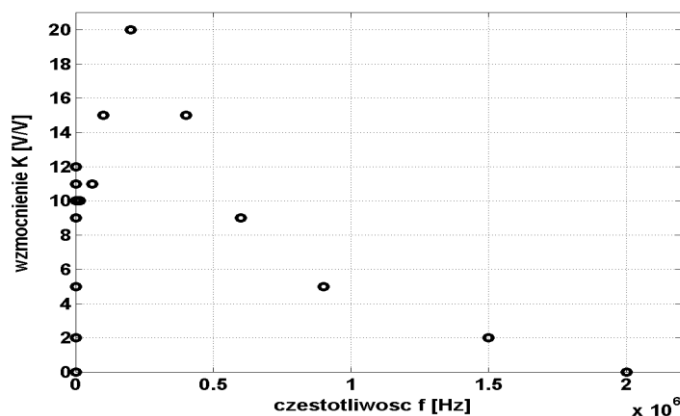
W przypadku braku dostępu do siatki logarytmicznej wykres można również wykonać na zwykłym papierze milimetrowym stosując odpowiednie skalowanie.

Przykład 1.

W tabeli 1 w wierszach 1-3 przedstawiono wyniki pomiaru przebiegu wzmocnienia pewnego wzmacniacza w funkcji częstotliwości. Wykres sporządzony na podstawie wartości zawartych w tabeli 1 i przedstawiony na rys. 6 w skali liniowej jest całkowicie nieczytelny dla małych częstotliwości.

Tabela 1. Wyniki pomiarów wzmocnienia K pewnego wzmacniacza w funkcji częstotliwości f

Lp.	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f	Hz	1	1,5	2	4	8	12	20	40	500	$1,5 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
K	V/V	0	2	5	9	11	12	11	10	10	10	10	11	15	20	15	9	5	2	0
f'	cm	0	0,5	0,9	1,8	2,7	3,2	3,9	4,8	8,1	9,5	12,5	14,3	15,0	15,9	16,8	17,3	17,9	18,5	18,9



Rys. 6. Przykład źle dobranej skali dla osi częstotliwości

Warto zastanowić się chwilę nad wartościami f . Obejmują one zakres od 1 Hz do 2 MHz czyli ponad 6 dekad. Dekadę tworzy przedział, którego górna granica jest 10 razy większa od dolnej.

- Pierwsza dekada obejmuje więc zakres (0, 10) Hz,
- druga (10, 100) Hz,
- trzecia (100, 1000) Hz itd.

Długości tych przedziałów w skali liniowej rosną. Zastosowanie skali logarytmicznej (np. logarytmu przy podstawie 10 z wartości częstotliwości) sprawia, że na rysunku będą one

miały tę samą długość. Przypuśćmy, że na wykonanie osi dla f mamy do dyspozycji 21 cm. Rezerwując na każdą dekadę w skali logarytmicznej po 3 cm uzyskamy długość odcinka odpowiadającego wszystkim 6 dekadom równą:

$$6 \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

Poszczególnym granicom przedziałów będą więc odpowiadały następujące wartości w centymetrach:

$$10^0 \text{ Hz} \rightarrow 0 \text{ cm}$$

$$10^1 \text{ Hz} \rightarrow 3 \text{ cm}$$

$$10^2 \text{ Hz} \rightarrow 6 \text{ cm}$$

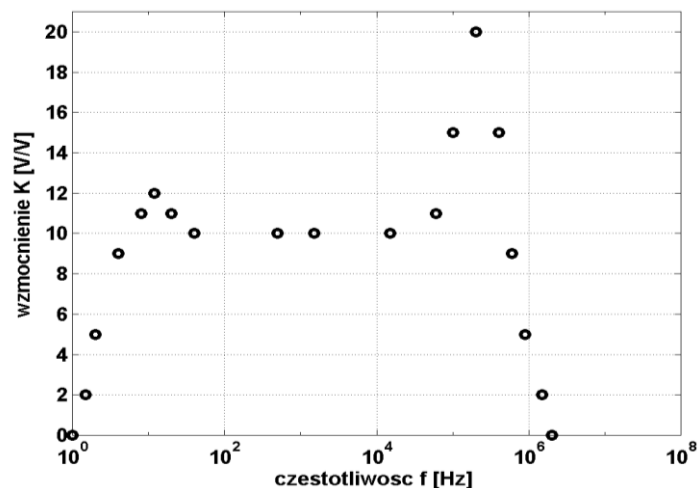
$$10^3 \text{ Hz} \rightarrow 9 \text{ cm}$$

itd.

Zależność przeskalowująca jest oczywista: wartościom częstotliwości wyrażonym w hercach należy przypisać następujące odległości na osi wyrażone w centymetrach:

$$f'[\text{cm}] = \log_{10}\{f[\text{Hz}]\} \cdot 3 [\text{cm}].$$

Wiersz 4 tabeli 1 zawiera obliczone wartości f' [cm] a odpowiedni wykres w uzyskanej skali logarytmiczno-liniowej przedstawia rys. 7. Można na nim zaobserwować pasmowy charakter wzmocnienia wzmacniacza z dwoma podbiciami w zakresie niskich i wysokich częstotliwości.



Rys. 7. Przykład dobrze dobranej skali dla osi częstotliwości.

W celu wykorzystania pełnej powierzchni rysunku niejednokrotnie konieczne jest przesuwanie początku układu współrzędnych.

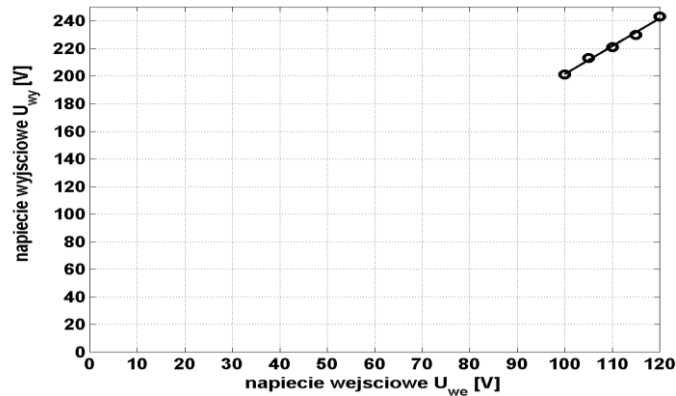
Przykład 2.

W tabeli 2 w wierszach 1-3 przedstawiono przykładowe wyniki pomiarów napięcia wejściowego i wyjściowego pewnego układu.

Tabela 2. Przykładowa charakterystyka przetwarzania

Lp.	-	1	2	3	4	5
U_{we}	mV	100	105	110	115	120
U_{wy}	mV	201	213	221	230	243
U'_{we}	cm	0	4	8	12	16
U'_{wy}	cm	0,5	6,5	10,5	15,0	21,5

Podobnie jak poprzednio, wykres sporządzony na ich podstawie – rysunek 8 – jest nieczytelny i wymaga przesunięcia początku układu współrzędnych.



Rys. 8. Przykład złego rozplanowania powierzchni rysunku.

Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji 18 cm dla osi x i 25 cm dla osi y. Należy zastosować takie zależności przeskalowujące, aby po pierwsze – wielokrotność działki podstawowej papieru milimetrowego np. 1 cm, 2 cm, 3 cm itd. odpowiadała 1, 2, 5, 10, 20, 50 itd. jednostkom mierzonej wielkości (należy to zapewnić zawsze, niezależnie od konieczności przesuwania początku układu współrzędnych) i po drugie – aby w pełni wykorzystać powierzchnię wykresu. Rozważmy oś x. Chcemy, aby długości ok. 18 cm odpowiadał przedział o szerokości

$$120 \text{ mV} - 100 \text{ mV} = 20 \text{ mV}.$$

Przy skalach bazujących na jednostce papieru milimetrowego np. 1 cm/ 1mV i 1 cm/ 2mV uzyskujemy wartości:

$$20 \text{ mV} \cdot (1 \text{ cm} / 1\text{mV}) = 20 \text{ cm}$$

$$\text{oraz } 20 \text{ mV} \cdot (1 \text{ cm} / 2 \text{ mV}) = 10 \text{ cm},$$

odpowiadające kolejno – przekroczeniu i znacznemu niewypełnieniu dostępnego zakresu 18 cm. Przy zastosowaniu skali $S_x = 4 \text{ cm} / 5 \text{ mV}$ bazującej na wielokrotności działki podstawowej papieru milimetrowego uzyskujemy wartość

$$20 \text{ mV} \cdot (4 \text{ cm} / 5 \text{ mV}) = 16 \text{ cm},$$

co już można uważać za rozsądne wypełnienie dostępnego zakresu. Zależność przeskalowująca będzie więc miała postać:

$$U'_{we}[\text{cm}] = (U_{we} - U_{wemin}) \cdot S_x = (U_{we} - 100 \text{ mV}) \cdot (4 \text{ cm} / 5 \text{ mV}).$$

Podobnie postępując można dla osi y wyprowadzić zależność:

$$U'_{wy}[\text{cm}] = (U_{wy} - U_{wymmin}) \cdot S_y,$$

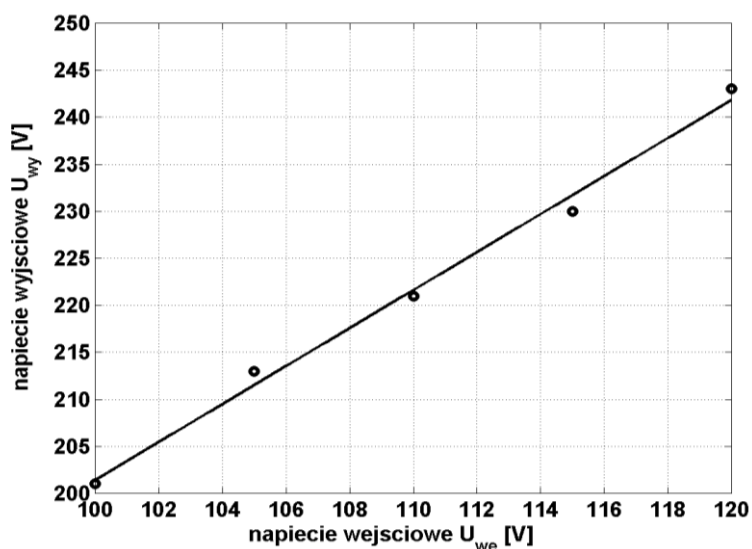
W której S_y najwygodniej wyznaczyć tak, aby zakresowi 25 cm odpowiadał przedział (200, 250) mV, czyli przedział o szerokości 50 mV:

$$S_y = 1 \text{ cm} / 2 \text{ mV},$$

gdyż $50 \text{ mV} \cdot S_y = 25 \text{ cm}$. Ostatecznie więc:

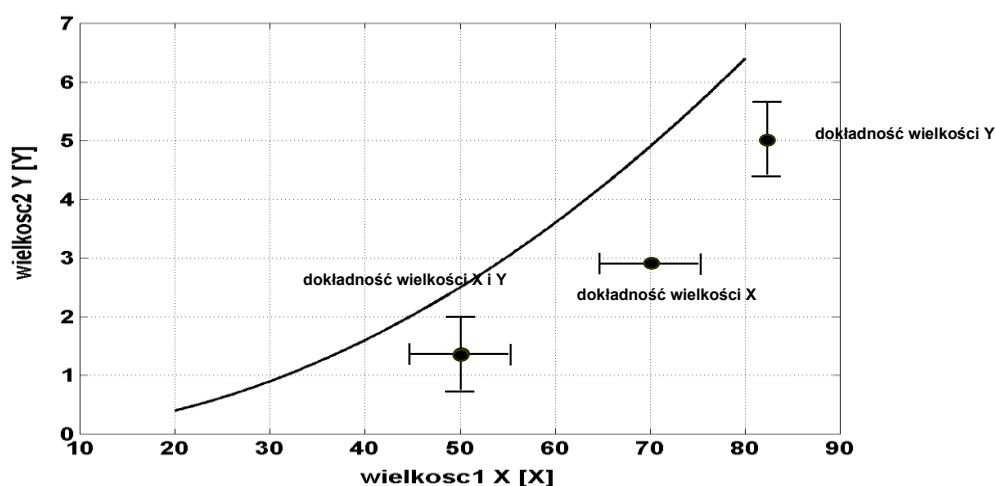
$$U'_{wy}[\text{cm}] = (U_{wy} - 200 \text{ mV}) \cdot (1 \text{ cm} / 2 \text{ mV}).$$

Wyznaczone wartości $U'_{we}[\text{cm}]$ i $U'_{wy}[\text{cm}]$ zawiera w wierszach 4-5 tabela 2, a sporządzony na ich podstawie wykres przedstawia rys. 9.



Rys. 9. Przykład dobrego rozplanowania powierzchni rysunku.

Niekiedy należy na wykresie zaznaczyć stopień dokładności realizowanych pomiarów. Używa się wówczas oznaczeń przedstawionych na rys. 10.



Rys. 10. Przykłady oznaczania na wykresach dokładności pomiarów.

W większości przypadków należy również jako zasadę przyjąć fakt, iż poszczególnych punktów wykresu nie należy łączyć krzywą łamaną. Można tak postąpić jedynie wówczas, gdy przedstawiane zależności mają znaczenie jedynie formalne. W przypadku wielkości fizycznych należy dokonać przybliżenia dyskretnych wyników pomiarów wykonując tzw. **aproksymację**.

Zadaniem aproksymacji zależności między dwiema wielkościami X i Y jest szacowanie jej przebiegu na podstawie przeprowadzonych pomiarów. Można tego dokonać w sposób graficzny za pomocą krzywików i linijki, prowadząc krzywą aproksymującą tak, aby przechodziła ona przez jak największą liczbę punktów określonych empirycznie lub blisko nich. Rozłożenie punktów względem krzywej powinno być, według oceny “na oko”, symetryczne z zachowaniem, w miarę możliwości, jednakowej liczby punktów po jej obu stronach.

Znacznie dokładniejszą metodą aproksymacji jest metoda analityczna zwana **metodą najmniejszych kwadratów** lub metodą regresji. W najbardziej elementarnym ujęciu jako funkcję aproksymującą przyjmuje się wielomian n -tego rzędu:

$$Y = f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

którego współczynniki a_0, a_1, \dots, a_n wyznacza się na podstawie wyników pomiarów. Stopień wielomianu przyjmowany jest z reguły na podstawie pewnej wiedzy *a priori* o badanej zależności, tzn. należy założyć, że jest ona liniowa ($n = 1$), kwadratowa ($n = 2$), sześcienna ($n = 3$) itd.

Przy braku tej wiedzy rząd wielomianu można dobierać eksperymentalnie, pamiętając jednak, że jego wzrost prowadzi, co prawda, do zmniejszenia błędu dopasowania krzywej aproksymującej do punktów empirycznych, ale kosztem pojawienia się między nimi niepożądanych oscylacji.

Zasada wyznaczania funkcji aproksymującej jest następująca.

Przypuśćmy, że chodzi o wyznaczenie często występującej w praktyce zależności liniowej dla N punktów pomiarowych. Poszukujemy a_0 i a_1 w formule:

$$Y = a_0 + a_1 X$$

Przy zakładanej liniowości danemu punktowi pomiarowemu x_i powinna odpowiadać wartość $y'_i = a_0 + a_1 x_i$. Z pomiarów znamy jednak „błędne” y_i , więc różnica $\Delta_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i)$ jest błędem i -tego wyniku y_i . Tworząc sumę kwadratów wszystkich błędów:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2$$

możemy znaleźć takie a_0 i a_1 , dla których powyższa suma osiąga minimum (stąd uzasadnienie nazwy – metoda najmniejszych kwadratów). Badanie minimum jest zadaniem trywialnym i polega na wyznaczeniu pochodnych względem a_0 i a_1 i przyrównaniu ich do zera. Z układu dwu równań wyznacza się wówczas wartości a_0 i a_1 :

$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum y_i}{N} - a_1 \frac{\sum x_i}{N},$$

w których operacje sumowania odbywają się względem indeksu i . Otrzymane wartości dają najlepsze przybliżenie współczynników poszukiwanej prostej oparte na wynikach pomiarów w sensie średniokwadratowym. Organizacja powyższych obliczeń powinna być w sprawozdaniu zobrazowana tabelą zestawiającą kolejno wartości $x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2$ potrzebne do końcowych wzorów.

Przedstawioną metodę łatwo uogólnić na przypadek wielomianu dowolnego stopnia lub dowolnej funkcji $y = f(x)$ zależnej od nieznanymi parametrów a_0, a_1, \dots , jednakże powstałe równania liniowe mogą być wtedy trudne lub wręcz niemożliwe do rozwiązania.

Zagadnienia aproksymacji nie należy mylić z inną metodą znajdowania zależności funkcyjnej między danymi uzyskanymi z pomiaru, zwaną **interpolacją**. Polega ona na wyznaczeniu krzywej, która jest dopasowana z zerowym błędem do wyników pomiarów (przechodzi przez wszystkie punkty empiryczne). W zagadnieniach interpolacji wykorzystuje się m. in. metody funkcji sklepanych (ang. *splines*).

8. NIEPEWNOŚĆ POMIARU

Każdy pomiar obarczony jest pewnym błędem, którego źródłem może być: niedoskonałość przyrządów pomiarowych, ograniczona rozdzielczość przyrządów pomiarowych, przybliżenia i założenia wynikające z wykorzystywanej metody pomiarowej, wpływ czynników zewnętrznych itp. oznacza to, że w trakcie pomiaru nie otrzymujemy wartości rzeczywistej wielkości mierzonej lecz jej wartość przybliżoną.

Niedokładność pomiaru charakteryzuje się za pomocą parametru zwanego niepewnością. Niepewność pomiaru definiowana jest jako *parametr związany z wynikiem pomiaru charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej*. Niepewność pomiaru zawiera na ogół wiele składników. Część z nich można wyznaczyć na podstawie otrzymanego rozrzutu wyników serii pomiarów. Inne ocenia się na podstawie wiedzy eksperymentatora i informacji pochodzących . np. z dokumentacji przyrządów pomiarowych.

Te dwie, różne pod względem sposobu otrzymywania, grupy niepewności stanowią podstawę do podziału niepewności pomiaru na dwa typy:

- niepewności typu A – wyznaczane metodami statystycznymi,
- niepewności typu B – wyznaczane innymi metodami.

Można przyjąć, że niepewność typu A, ze względu na źródła jej powstawania, odpowiada błędom spowodowanym czynnikami przypadkowymi, natomiast niepewność typu B – błędom mającym charakter systematyczny.

9. SPOSÓB WYRAŻANIA DOKŁADNOŚCI PRZYRZĄDÓW ANALOGOWYCH

Każdy przyrząd pomiarowy charakteryzuje się pewną niedokładnością. Na podstawie dokumentacji wykorzystywanego przyrządu można określić błąd graniczny (instrumentalny) wykonanego pomiaru, będący parametrem określającym niedokładność pomiaru, której źródłem jest niedokładność danego przyrządu.

Jeśli klasa przyrządu pomiarowego jest oznaczana symbolem *kl.d* np. 1,5 (co oznacza 1,5%), to błąd graniczny pomiaru wielkości X wyznaczany jest za pomocą wyrażenia:

$$\Delta_g X = \frac{kl.d}{100} X_N$$

gdzie: X_N – wartość nominalna (maksymalna) zakresu pomiarowego (dla przyrządów wielozakresowych jest to wartość maksymalna podzakresu pomiarowego, na którym był wykonywany pomiar).

Istotne jest to, że wartość błędu granicznego pomiaru jest stała na danym podzakresie miernika i nie zależy od wartości wielkości mierzonej X_m .

Jeśli dokładność przyrządu pomiarowego jest wyrażona w **procentach wartości mierzonej** (co jest oznaczane na podzielnicy miernika lub w jego dokumentacji) jako *kl.d*, to przy wyznaczaniu błędu granicznego pomiaru korzysta się z zależności

$$\Delta_g X = \frac{kl.d}{100} X_m$$

gdzie: X_m – wartość mierzona badanej wielkości (wartość, którą wskazał miernik).

Wartość błędu granicznego jest w tym przypadku zależna od wartości wielkości mierzonej i nie jest stała na danym podzakresie miernika.

W niektórych analogowych elektronicznych przyrządach pomiarowych można spotkać się z wyrażeniem opisującym zależność błędu granicznego pomiaru danym przyrządem zarówno od wartości mierzonej X_m , jak i od wartości nominalnej zakresu pomiarowego X_N .

Wyrażenie to jest na ogół podawane w postaci:

$$\Delta_g X = a_{\%} X_m + b_{\%} X_N$$

gdzie: a, b – stałe charakterystyczne dla danego przyrządu.

Taki sposób opisu właściwości dokładnościowych miernika jest stosowany wtedy, gdy odpowiednią zależność udało się wykryć w procesie produkcyjnym przyrządu.

Podane sposoby wyznaczania błędów granicznych przyrządów są słuszne dla przyrządów analogowych z liniową podziałką (amperomierze, woltomierze). W przypadku przyrządów z nieliniową podziałką (omomierze) sposób wyznaczania błędu granicznego jest bardziej złożony. Wśród omomierzy analogowych możemy wyróżnić w zależności od ich budowy omomierze równoległe i szeregowo. Oba typy omomierzy analogowych mają silnie nieliniową podziałkę. Natomiast omomierze szeregowe w odróżnieniu od równoległych mają podziałkę biegnącą od prawej strony do lewej. Klasa dokładności omomierzy może być podana w procentach, milimetrach lub mierze katowej (stopniach). W pierwszym przypadku błąd graniczny omomierza analogowego można wyznaczyć z poniższego wzoru:

$$\Delta_g R = \frac{kl.d}{100} R_{we} \left(1 + \frac{R_m}{R_{we}} \right)^2$$

gdzie: $kl.d$ – klasa dokładności wyrażona w procentach podziałki,

R_{we} – wartość rezystancji środka podziałki,

R_m – wartość rezystancji mierzonej (wartość, którą wskazał miernik).

W przypadku gdy klasa dokładności podana jest w mm lub stopniach, w mianowniku zamiast wartości 100 należy wstawić długość podziałki omomierza wyrażoną odpowiednio w mm lub stopniach. Informacja o długości podziałki powinna być zawarta w instrukcji danego przyrządu. Dokładność pomiarów omomierzem analogowym jest tym większa im bliżej środka podziałki wychyli się wskazówka. Zdarza się, że dokładność omomierza analogowego podana jest jako procent wartości mierzonej. Jednak zależność ta jest spełniona tylko przy wychyleniu wskazówki w pewnym zakresie wokół środka podziałki. Na końcu i na początku podziałki zależność ta jest nieprawdziwa. W przypadku tak określonej dokładności omomierza analogowego producent powinien określić zakres podziałki w jakim ta zależność jest spełniona.

10. SPOSOBY WYRAŻANIA DOKŁADNOŚCI PRZYRZĄDÓW CYFROWYCH

Określanie błędów wskazań przyrządów analogowych (wskazówkowych) i cyfrowych różni się w zasadniczy sposób. W przypadku przyrządów cyfrowych błędy wykonywanych nimi pomiarów oblicza się w odmienny sposób. Przede wszystkim nie występuje tu pojęcie klasy dokładności, a informacje dotyczące dokładności podawane przez producentów, są dość obszernym zbiorem różnorodnych liczb. Dzieje się tak dlatego, że produkowane przyrządy cyfrowe skupiają w sobie wiele różnych funkcji pomiarowych – stąd ich nazwa – multimetry.

Przeciętny multimetr pozwala na pomiar napięć i prądów stałych i zmiennych oraz rezystancji. Bardziej złożone przyrządy tego rodzaju mierzą dodatkowo indukcyjność, pojemność elektryczną, częstotliwość, temperaturę, itp.

Dokładność cyfrowych przyrządów pomiarowych określana jest w sposób bardziej złożony niż elektrycznych mierników wskazówkowych. Nie istnieje tu pojęcie klasy dokładności, tak charakterystycznej dla przyrządów wskazówkowych. Poza tym brak jest jednolitego sposobu podawania przez różnych wytwórców granicznych błędów wskazań charakteryzujących dokładność ich wyrobów. Sposób określania błędów jest w dodatku różny dla poszczególnych funkcji pomiarowych w ramach tego samego przyrządu (np. inny dla pomiaru napięć stałych, a inny dla napięć zmiennych).

Należy dodać, że renomowane firmy produkujące aparaturę pomiarową najwyższej klasy, podają wartości błędów wskazań swoich produktów, zastrzegając jednocześnie, że wartości te gwarantowane są tylko w określonym przedziale czasu, po upływie którego powinny być ponownie poddane sprawdzeniu u wytwórcy.

Dokładność przyrządu cyfrowego, określająca jego błąd graniczny dopuszczalny, może być przedstawiana wyrażeniem:

$$\pm (a\% \text{ wartości mierzonej} + n \text{ cyfr})$$

Pierwszy składnik przedstawia sobą tzw. składową analogową błędności o wartości względnej $a\%$, drugi – tzw. składową cyfrową błędności, jest wartością bezwzględną. W zależności od potrzeb przedstawione wyrażenie służy do obliczenia wartości bezwzględnej błędności granicznej lub jego wartość względnej.

Jak rozumieć składnik „ n cyfr”? Jest to wartość wynikająca ze zwielokrotnienia b razy rozdzielczości pomiaru - $\Delta_r X$, czyli:

$$n \text{ cyfr} = n \cdot \Delta_r X$$

Błąd graniczny dopuszczalny wyrażony wartością bezwzględną oblicza się z zależności:

$$\Delta_g X = \frac{a\% X}{100\%} + b \cdot \Delta_r X$$

Przykład 1.

Dokładność przyrządu przedstawiono zależnością: $0,5\%U_m + 2$ cyfry. Pomiar wykonano na zakresie pomiarowym $2,000$ V; odczyt wynosił $U_m = 1,658$ V. Podać błąd graniczny przyrządu w tym pomiarze.

Dla wykonanego pomiaru rozdzielczość wynosiła $\Delta_r U = 0,001V$, w związku z tym:

$$\Delta_g U = \frac{0,5\% 1,658V}{100\%} + 2 \cdot 0,001V = 0,0083 + 0,002 = 0,0103V = 0,010V$$

Drugi sposób zapisu błędności przyrządu cyfrowego przedstawia wyrażenie:

$$\pm (a\% \text{ odczytu} + b\% \text{ zakresu}) \quad (2)$$

W związku z tym, wzór obliczeniowy na błąd graniczny dopuszczalny ma postać:

$$\Delta_g X = \frac{a\% X}{100\%} + \frac{b\% X_z}{100\%}$$

Warto zauważyć, że w pomiarach wartości bliskich zakresowi w błędności granicznej dominuje składowa analogowa, natomiast w pomiarach wartości małych względem zakresu, przeważa składowa cyfrowa błędności. Stąd podobnie jak w przyrządach analogowych, pomiary powinny być wykonane przy jak najpełniejszym „wypełnieniu” pola odczytowego. Mówiąc inaczej, dobór właściwego zakresu pomiarowego przyrządu cyfrowego jest tak samo ważny jak w przyrządach analogowych.

Przykład 2.

Dokładność przyrządu przedstawia zależność: $0,5\% U_x + 0,1\% U_z$. Wskazanie wynosiło $102,3$ mV. Odczytu dokonano na zakresie 200 mV.

Błąd graniczny bezwzględny wynosi:

$$\Delta_g U = \frac{0,5\% 102,3mV}{100\%} + \frac{0,1\% 200mV}{100\%} = 0,5115 + 0,2 = 0,71mV$$

Uwaga:

Dla przyrządów cyfrowych o dużej dokładności wartości współczynników procentowych a i b w wyrażeniach (1) i (2) mogą być wyrażone nie w procentach ale w „częściach milionowych” – ppm (ang. part per milion). W takim przypadku zamiana wartości

współczynników a i b na ułamek polega na podzieleniu ich przez 1 000 000 a nie przez 100 jak w przypadku wartości podanych w procentach.

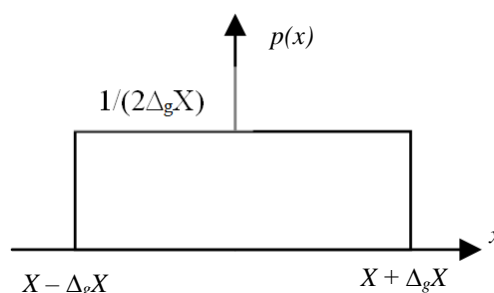
11. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW BEZPOŚREDNICH JEDNOKROTNYCH

O końcowej niepewności pomiaru bezpośredniego decydują błędy przyrządów pomiarowych, metody, eksperymentatora i czynniki zewnętrzne. Jeżeli jednak pomiar zostanie wykonany starannie, przebiegać będzie w warunkach odniesienia, a przyrząd został tak dobrany, aby błąd metody był pomijalny, to na niepewność pomiaru będzie wpływać tylko błąd podstawowy przyrządu oraz czynniki losowe, których wpływ można oszacować przeprowadzając serię pomiarów. Zatem w przypadku starannie wykonanych pomiarów jednokrotnych można się ograniczyć do oszacowania niepewności typu B związanej z błędem przyrządu.

Teoria niepewności pomiaru zakłada, że każdy odczyt, nawet pojedynczy, ma cechy zdarzenia losowego, a więc podlega prawom statystyki. Inaczej mówiąc, można mu przypisać właściwości statystyczne, określone m.in. prawdopodobieństwem jego wystąpienia.

Podstawową cechą zdarzeń losowych jest możliwość ich opisu za pomocą funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zdarzenia. W pomiarach zdarzeniem jest pojedynczy odczyt lub też błąd tego odczytu.

Dla przyrządów pomiarowych za najbardziej odpowiednią funkcję rozkładu prawdopodobieństwa błędów przyjmuje się tzw. rozkład jednostajny zwany też prostokątnym lub równomiernym, przedstawiony na rysunku 11. Z ogólnych zasad tworzenia funkcji rozkładu wynika, że dla rozkładu jednostajnego jest ona ograniczona wartościami błędu granicznego dopuszczalnego, a jej wartość jest stała i wynosi $1/(2\Delta_g X)$ (pole pod funkcją ma wartość jednostkową). Przyjęcie dla przyrządów takiej funkcji oznacza, że w pojedynczym pomiarze przyrząd ma rzeczywisty błąd o wartości należącej do przedziału $\pm \Delta_g X$, przy czym, wystąpienia każdej wartości błędu ma jednakowe prawdopodobieństwo. Odnosząc to do wartości mierzonej, uzyskuje się przedział wartości $X \pm \Delta_g X$, w którym występuje wartość poprawna z prawdopodobieństwem równym pewności.



Rys. 11. Wykres przedstawiający funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jednostajnego błędu przyrządu ($\Delta_g X$ – błąd graniczny, X – wartość mierzona)

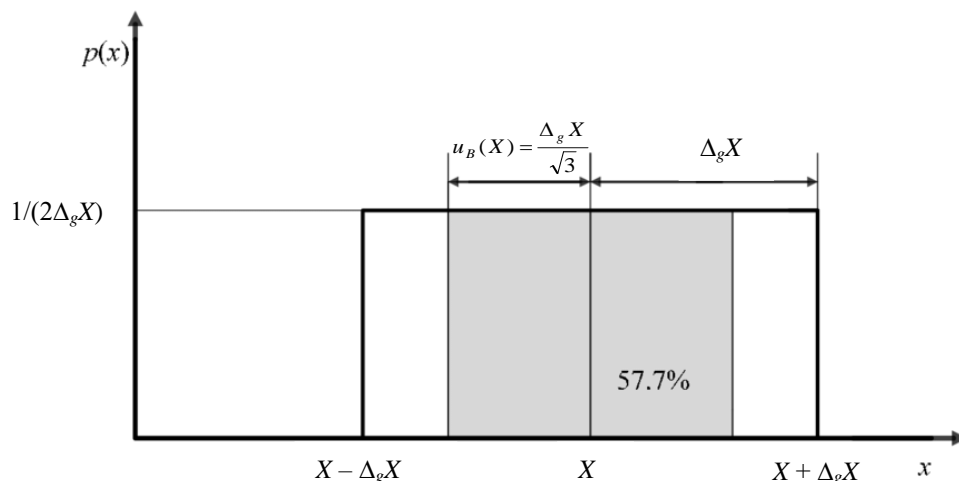
Parametrem opisującym dowolny rozkład prawdopodobieństwa jest **odchylenie standardowe**, które w przypadku rozkładu jednostajnego (rys. 12) wynosi:

$$s = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

Dla potrzeb pomiarowych odchylenie standardowe przyjęto nazywać **niepewnością standardową** i oznaczana jest małą literą u z dolnym indeksem A lub B w zależności od typu niepewności. Niepewność oszacowana na podstawie błędu przyrządu pomiarowego jest niepewnością typu B. Zatem pamiętając o przyjętych założeniach, można zapisać, że:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

Czasami przyjmowany jest rozkład trójkątny błędów przyrządu. Wtedy w powyższych wzorze mianownik przyjmie wartość $\sqrt{6}$.



Rys. 12. Niepewność standardowa przy równomiernym rozkładzie błędów

Niepewność standardowa może również zostać wyrażona wartością względną, którą oznacza się symbolem $u_r(X)$ i wyznacza się jako stosunek niepewności standardowej bezwzględnej do wartości zmierzonej wyrażony w procentach:

$$u_r(X) = \frac{u(X)}{X} \cdot 100\%$$

Niepewność standardowa rozkładu jednostajnego zawęża przedział prawdopodobnych błędów do ok. 58% wartości błędu granicznego przyrządu (rys. 12). W związku z tym, przyjęcie niepewności standardowej do oceny dokładności pomiaru daje zbyt małe zaufanie do wyniku pomiaru. Z tego powodu w wyniku końcowym pomiaru uwzględnia się **niepewność rozszerzoną** - wynikającą z pomnożenia niepewności standardowej przez tzw. **współczynnik rozszerzenia k**. Niepewność rozszerzoną bezwzględną oznacza się dużą literą U . Pamiętając o przyjętych założeniach, dla pomiarów bezpośrednich jednokrotnych można zapisać, że:

$$U(X) = k \cdot u_B(X)$$

W rozpatrywanym przypadku współczynnik rozszerzenia przyjmuje wartość:

$$k = p \cdot \sqrt{3}$$

gdzie p – jest przyjętym poziomem ufności wyniku pomiaru, który wyraża prawdopodobieństwo wystąpienia wartości rzeczywistej w przedziale od $X-U(X)$ do $X+U(X)$.

Dokładności pomiaru określa niepewność (rozszerzona) względna, wyrażona w procentach:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X} \cdot 100\%$$

12. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW BEZPOŚREDNICH WIELKROTNYCH

Zajmijmy się teraz szacowaniem niepewności serii pomiarów bezpośrednich. W takim przypadku możemy oszacować zarówno niepewność typu B w oparciu o wiedzę

eksperymentatora na temat użytych przyrządów, wykorzystanych metod i jego doświadczenia jak i niepewność typu A na podstawie rozrzutu uzyskanych wyników.

Oszacowanie niepewności standardowej typu A

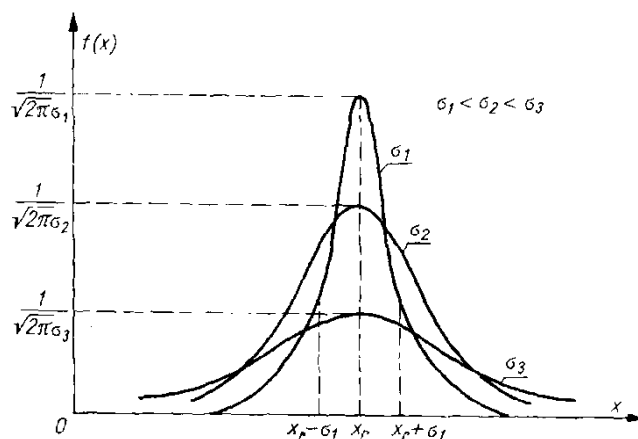
Niepewność typu A wyraża wpływ czynników przypadkowych na wynik pomiaru i może zostać oszacowana na podstawie wielokrotnego powtórzenia pomiaru tej samej wartości wielkości pomiarowej (serii pomiarowej). Z uwagi na fakt, że wyniku pomiaru obciążonego błędem przypadkowym nie da się przewidzieć, przyjmuje się, że jest on zmienną losową (najczęściej ciągłą). W procesie pomiaru zmienna ta przyjmuje tylko jedną konkretną wartość; z określonym prawdopodobieństwem możliwe są jednak również wartości inne. Ze względu na potwierdzone doświadczalnie założenia mówiące, że przy odpowiednio dużej liczbie pomiarów ($n > 30$):

- błędy równe co do wartości bezwzględnej, ale o przeciwnych znakach zdarzają się jednakowo często,
- prawdopodobieństwo wystąpienia błędu dodatniego równe jest prawdopodobieństwu wystąpienia błędu ujemnego,
- częstość występowania błędów małych jest większa niż błędów dużych,
- błędy są zdarzeniami niezależnymi,

zmienna losowa X tworząca wynik pomiaru charakteryzuje się ściśle określonym rozkładem prawdopodobieństwa, zwanym rozkładem Gaussa. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa określona jest poniższym wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_r)^2}{2\sigma^2}\right]$$

w którym jako x_r traktuje się wartość rzeczywistą wartości mierzonej. Parametr $\sigma > 0$ jest miarą rozrzutu wartości tak określonej zmiennej losowej i nosi nazwę odchylenia standardowego. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa, nazywanego również normalnym, przedstawia rysunek 13.



Rys. 13. Przykłady funkcji Gaussa dla różnych wartości odchylenia standardowego

Podczas wykonywania pomiarów wartość rzeczywista x_r wielkości mierzonej nie jest znana, ale można wykazać, że jej wartością najbardziej prawdopodobną ze statystycznego punktu widzenia jest średnia arytmetyczna serii n pomiarów:

$$X_s = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Drugi parametr rozkładu zmiennej losowej jako wyniku pomiaru, odchylenie standardowe σ , może być wyznaczony ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_s)^2}{n-1}}$$

jako odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru. Oczywiście samą średnią arytmetyczną X_s serii pomiarów można też traktować jako zmienną losową (licząc średnie z kilku serii pomiarowych uzyskuje się różniące się wartości).

Teoria prawdopodobieństwa stwierdza, że odchylenie standardowe średniej jest \sqrt{n} razy mniejszy od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_s)^2}{n(n-1)}}$$

Dla potrzeb pomiarowych, powyższy parametr nazywany jest niepewnością standardową typu A i oznaczany symbolem $u_A(X)$.

Oszacowanie niepewności standardowej typu B

Jeżeli pomiar zostanie wykonany starannie, przebiegać będzie w warunkach odniesienia, a przyrząd został tak dobrany, aby błąd metody był pomijalny to jedynym czynnikiem systematycznym będzie niedokładność przyrządu pomiarowego. Przyjmując równomierny rozkład błędu przyrządu, niepewność standardowa typu B opisuje poniższa zależność:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

gdzie $\Delta_g X$ to błąd graniczny przyrządu pomiarowego wyznaczony przy założeniu, że wartość zmierzona była równa wartości średniej X_s wyznaczonej na podstawie wyników serii pomiarowej.

Oszacowanie niepewności standardowej złożonej

Na podstawie niepewności standardowych typu A i B wyznacza się niepewność złożoną $u_c(X)$ korzystając z poniższej zależności:

$$u_c(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_B^2(X)}$$

Jeżeli jedna z niepewności ma wartość dużo mniejszą od drugiej (minimum 10 razy) to może zostać ona pominięta. Zatem:

- w przypadku, gdy $u_A(X) \gg u_B(X)$ można przyjąć, że $u_c(X) = u_A(X)$,
- natomiast w sytuacji odwrotnej, gdy $u_B(X) \gg u_A(X)$ można przyjąć, że $u_c(X) = u_B(X)$.

Oszacowanie niepewności rozszerzonej

Niepewność rozszerzoną, oznaczaną symbolem $U(X)$, wyznacza się mnożąc niepewność standardową złożoną przez tzw. współczynnik rozszerzenia k :

$$U(X) = k \cdot u_c(X)$$

Wyznaczenie współczynnika rozszerzenia realizuje się porównując otrzymane wartości niepewności standardowych typu A i B według następujących zasad:

Zasada 1:

W przypadku gdy niepewność typu A jest znacząco większa (kilka razy) od niepewności typu B to współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności p określa się korzystając z

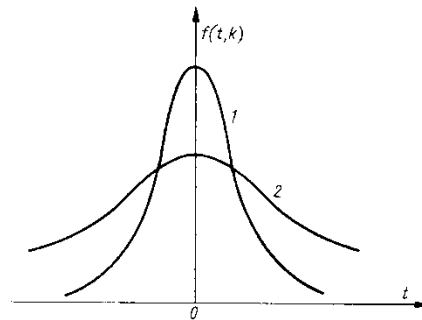
tablic rozkładu normalnego. Poniżej wymienione są przykładowe poziomy ufności oraz odpowiadające im współczynniki rozszerzenia k dla rozkładu normalnego:

- $p = 68 \%$, $k = 1$;
- $p = 95 \%$, $k = 2$;
- $p = 99,7 \%$, $k = 3$.

W sytuacji gdy liczba wykonanych pomiarów w serii jest mała ($n < 30$) współczynnik rozszerzenia należy określać na korzystając z tablic rozkładu t-Studenta (zwanego również rozkładem t lub rozkładem Studenta) na podstawie przyjętego poziomu ufności oraz liczby stopni swobody. Liczba stopni swobody, oznaczana symbolem ν , jest parametrem rozkładu t-Studenta i jest zależna od liczby pomiarów n :

$$\nu = n - 1$$

Rozkład t-Studenta o mniej niż 30 stopniach swobody znacznie odbiega od rozkładu normalnego. Wykres zamieszczony na rysunku 14 przedstawia funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego i rozkładu t-Studenta wyznaczonych na podstawie wyników małolicznej serii pomiarowej. Można zauważyć, że przy takich samych wartościach pozostałych parametrów, czyli wartości średniej i odchylenia standardowego, rozkład t-Studenta o małej liczbie stopni swobody jest bardziej płaski niż rozkład normalny.



Rys. 14. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (1) i rozkładu t-Studenta (2) wyznaczone na podstawie k wyników małolicznej serii pomiarowej

Zasada 2:

W przypadku gdy niepewność typu B (wyznaczona w oparciu o błąd przyrządu pomiarowego) jest znacząco większa (kilka razy) od niepewności typu A to współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności p określa się na podstawie założonego rozkładu błędów przyrządu, czyli:

- w przypadku przyjęcia rozkładu jednostajnego współczynnik rozszerzenia ma wartość:

$$k = p \cdot \sqrt{3}$$

- natomiast, w sytuacji gdy przyjęty został rozkład trójkątny błędów przyrządu wartość współczynnika rozszerzenia wynosi:

$$k = p \cdot \sqrt{6}$$

Zasada 3:

W przypadku gdy niepewności obu typów mają porównywane wartości, można przyjąć współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności na podstawie tablic rozkładu normalnego.

Oszacowanie niepewności rozszerzonej względnej

Wartość niepewności rozszerzonej względnej szacuje się według ogólnej zależności, przyjmując jako wartość zmierzona wartość średnią z pomiarów:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X_s} \cdot 100\%$$

Zapis wyniku końcowego pomiaru

Wynik końcowy pomiaru zapisuje się zgodnie z ogólnie obowiązującymi regułami, przyjmując wartość średnią serii pomiarowej jako wartość zmierzoną.

13. SPOSÓB PRZEDSTAWIANIA WYNIKU POMIARU

Wynik pomiaru przedstawia wartości mierzonej wielkości i niepewność jej wyznaczenia. Prawidłowa forma zapisu wyniku pomiaru ma ogólną postać następującą:

$$X = [x \pm U(X)] [X], p = \dots\dots\dots$$

w której: X – symbol mierzonej wielkości,

x – wartość mierzonej wielkości,

U(X) - niepewność rozszerzona pomiaru, przedstawiona wartością bezwzględną,

[X] - jednostka miary zmierzonej wielkości,

p - przyjęty w ocenie niepewności wyniku pomiaru poziom ufności.

Dokładność pomiaru określa niepewność rozszerzona względna, wyrażona w procentach:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{x} 100\%$$

Zapis wyniku pomiaru wyznacza przedział wartości [x - U(X), x +U(X)], wewnątrz którego prawdopodobnie występuje wartość rzeczywista (poprawna) - przy czym, prawdopodobieństwo jej wystąpienia jest określone podanym poziomem ufności.

W obliczeniach niepewności przyjmuje się typowe wartości poziomów ufności p: 0,68; 0,95; 0,99; 0,997. Poziom ufności 0,997 graniczy z pewnością, w pomiarach jest rzadko przyjmowany. Dla pomiarów wielkości elektrycznych wykonywanych z umiarkowaną dokładnością najczęściej przyjmuje się p = 0,95.

W przedstawianiu wyników pomiarów należy unikać wyrażania wartości liczbowych za pomocą „długich”, a stąd mało czytelnych liczb. Stosując tzw. **wielokrotności lub podwielokrotności jednostek miary** uzyskuje się liczby „przyjazne” do odczytu o wartościach z przedziału 0,1 - 1000, np. Mało czytelną wartość 1 365 000 Ω, należy zapisać 1,365 MΩ lub 1365 kΩ. Najczęściej stosowane wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar przedstawia poniższa tablica.

Mnożnik	Przedrostek	Oznaczenie	Przykład
10 ¹²	tera	T	21,6 TΩ
10 ⁹	giga	G	120 GΩ
10 ⁶	mega	M	1,25 MW
10 ³	kilo	k	400 kV
10 ⁻³	mili	m	854 mA
10 ⁻⁶	mikro	μ	3,650 μH
10 ⁻⁹	nano	n	10,4 nF
10 ⁻¹²	piko	p	0,74 pA

Opracowanie końcowego wyniku pomiaru należy rozpocząć od uproszczenia niepewności pomiaru, potem zaś – to samo zrobić z wartością surową wielkości mierzonej. W uproszczeniu niepewności pomiaru i wartości mierzonej należy kierować się poniższymi regułami:

Reguła I

Niepewność przedstawia się liczbą z 2 cyframi znaczącymi. Jeżeli rozdzielczość pomiaru nie pozwala na to, to należy niepewność przedstawić liczbą z 1 cyfrą znaczącą.

Niepewność względną zawsze podajemy 2 cyframi znaczącymi.

Przykład 1: Zaokrąglić wartości niepewności względnych:

$$U_r(I) = 1,365\% \approx 1,4\%$$

$$U_r(U) = 0,3551\% \approx 0,36\%$$

$$U_r(R) = 0,01365\% \approx 0,014\% = 1,4 \cdot 10^{-2} \%$$

Reguła II

Ostatnia cyfra znacząca wartości zmierzonej powinna występować na pozycji dziesiętnej ostatniej cyfry znaczącej niepewności.

Przykład 2: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(R) = 63,3 \Omega$, $R_m = 1263,85 \Omega$.

$$U(R) = 63,3 \Omega \approx 63 \Omega, \quad R_m = 1263,85 \Omega \approx 1264 \Omega.$$

$$\text{Wynik pomiaru: } R = (1264 \pm 63) \Omega$$

Przykład 3: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(U) = 0,07305 \text{ V}$, $U_m = 76,3581 \text{ V}$.

$$U(U) = 0,07305 \text{ V} \approx 0,073 \text{ V}, \quad U_m = 76,3581 \text{ V} \approx 76,358 \text{ V}.$$

$$\text{Wynik pomiaru: } U = (76,358 \pm 0,073) \text{ V}$$

Przykład 4: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(l) = 72,63 \text{ m}$, $l_m = 5326,5 \text{ m}$.

$$U(l) = 72,63 \text{ m} \approx 73 \text{ m}, \quad l_m = 5326,5 \text{ m} \approx 5326 \text{ m}$$

$$\text{Wynik pomiaru: } l = (5326 \pm 73) \text{ m} = \underline{(5,326 \pm 0,073) \text{ km}}.$$

Przykład 5: Przedstawić wynik pomiaru jeżeli: $U(U) = 374,2 \text{ V}$, $U_m = 18243 \text{ V}$.

$$U(U) = 374,2 \text{ V} \approx 370 \text{ V} = 3,7 \cdot 10^2 \text{ V}, \quad U_m = 18243 \text{ V} \approx 18240 \text{ V}.$$

$$\text{Wynik pomiaru: } U = (182,4 \pm 3,7) \cdot 10^2 \text{ V} = \underline{(18,24 \pm 0,37) \text{ kV}}.$$

Jak już stwierdzono wcześniej, w pomiarach o małej rozdzielczości, zwykle też mało dokładnych, występuje konieczność przedstawienia niepewnością z 1 cyfrą znaczącą. Wtedy w poprawnym zapisie wyniku pomiaru należy uwzględnić następująca regułę:

Reguła III

Niepewność przedstawiona 1 cyfrą znaczącą powinna mieć wartość większą niż przed zaokrągleniem (mówimy o zaokrągleniu liczby „w górę”).

Wyjątek: Niepewność należy zaokrąglić „w dół”, jeżeli jej wartość nie zmniejszy się więcej niż o 10%.

Przykład 6: Dokonano odczytu wartości mierzonej napięcia: $U_m = 126 \text{ V}$. Obliczona dla tego pomiaru niepewność wynosiła: $U(U) = 1,65 \text{ V}$. Ze względu na istniejącą rozdzielczość odczytu - wynoszącą 1V, niepewność należy zaokrąglić do liczby z 1 cyfrą znaczącą, czyli

$$U = (126 \pm 2) \text{ V}$$

Uwaga: Nie ma sensu przedstawiać powyższego wyniku pomiaru z niepewnością zapisaną 2 cyframi znaczącymi i z dopisanym do wartości mierzonej zerem, czyli $U = (126,0 \pm 1,6) \text{ V}$. Zapis ten sugeruje, że rozdzielczość pomiaru jest o jeden rząd wartości większa od rzeczywistej, co w konsekwencji prowadzi do błędnej oceny dokładności przyrządu.

Przykład 7: Zapisać wynik pomiaru, jeżeli $R_m = 1,22 \cdot 10^3 \Omega$ i $U(R) = 65,2 \Omega \approx 70 \Omega$.

$$\text{Wynik pomiaru: } R = (1220 \pm 70) \Omega = (1,22 \pm 0,07) 10^3 \Omega = \underline{(1,22 \pm 0,07) \text{ k}\Omega}.$$

14. UWAGI DOTYCZĄCE OBLICZEŃ

Przeprowadzone na wynikach surowych obliczenia rachunkowe powinny być na tyle dokładne aby nie wpływały na końcowy wynik pomiaru. Stąd w każdej fazie obliczeń występuje problem właściwego przybliżania liczb, a więc ich przedstawiania z odpowiednią liczbą cyfr znaczących. Przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować następujące reguły:

1. Obliczając wartość wielkości mierzonej w pomiarach pośrednich należy wynik obliczeń podawać taką samą liczbą cyfr znaczących jaką zapisane są surowe wartości mierzone wielkości mierzonych bezpośrednio.
2. Przy szacowaniu niepewności pomiaru wyniki obliczeń, które będą wykorzystywane do dalszych obliczeń należy zaokrąglić z pewnym zapasem. Wykonując obliczenia z wykorzystaniem arkuszy kalkulacyjnych do obliczeń podstawiamy wartości niezaokrąglone, a prezentujemy (np. w tabelach) wartości zaokrąglone.
3. Niepewność rozszerzoną względną i wynik końcowy pomiaru podajemy zawsze zgodnie z regułami opisanymi w rozdziale 13.