

1. NIEPEWNOŚĆ POMIARU

Każdy pomiar obarczony jest pewnym błędem, którego źródłem może być: niedoskonałość przyrządów pomiarowych, ograniczona rozdzielczość przyrządów pomiarowych, przybliżenia i założenia wynikające z wykorzystywanej metody pomiarowej, wpływ czynników zewnętrznych itp. oznacza to, że w trakcie pomiaru nie otrzymujemy wartości rzeczywistej wielkości mierzonej lecz jej wartość przybliżoną.

Niedokładność pomiaru charakteryzuje się za pomocą parametru zwanego niepewnością. Niepewność pomiaru definiowana jest jako *parametr związany z wynikiem pomiaru charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej*. Niepewność pomiaru zawiera na ogół wiele składników. Część z nich można wyznaczyć na podstawie otrzymanego rozrzutu wyników serii pomiarów. Inne ocenia się na podstawie wiedzy eksperymentatora i informacji pochodzących np. z dokumentacji przyrządów pomiarowych.

Te dwie, różne pod względem sposobu otrzymywania, grupy niepewności stanowią podstawę do podziału niepewności pomiaru na dwa typy:

- niepewności typu A – wyznaczone metodami statystycznymi,
- niepewności typu B – wyznaczone innymi metodami.

Można przyjąć, że niepewność typu A, ze względu na źródła jej powstawania, odpowiada błędom spowodowanym czynnikami przypadkowymi, natomiast niepewność typu B – błędom mającym charakter systematyczny.

2. SPOSÓB WYRAŻANIA DOKŁADNOŚCI PRZYRZĄDÓW ANALOGOWYCH

Każdy przyrząd pomiarowy charakteryzuje się pewną niedokładnością. Na podstawie dokumentacji wykorzystywanego przyrządu można określić błąd graniczny (instrumentalny) wykonanego pomiaru, będący parametrem określającym niedokładność pomiaru, której źródłem jest niedokładność danego przyrządu.

Jeśli klasa przyrządu pomiarowego jest oznaczana symbolem *kl.d* np. 1,5 (co oznacza 1,5%), to błąd graniczny pomiaru wielkości X wyznaczany jest za pomocą wyrażenia:

$$\Delta_g X = \frac{kl.d}{100} X_N$$

gdzie: X_N – wartość nominalna (maksymalna) zakresu pomiarowego (dla przyrządów wielozakresowych jest to wartość maksymalna podzakresu pomiarowego, na którym był wykonywany pomiar).

Istotne jest to, że wartość błędu granicznego pomiaru jest stała na danym podzakresie miernika i nie zależy od wartości wielkości mierzonej X_m .

Jeśli dokładność przyrządu pomiarowego jest wyrażana w procentach wartości mierzonej (co jest oznaczane na podzielniku miernika lub w jego dokumentacji) jako *kl.d*, np. 1,5, to przy wyznaczaniu błędu granicznego pomiaru korzysta się z zależności

$$\Delta_g X = \frac{kl.d}{100} X_m$$

gdzie: X_m – wartość mierzona badanej wielkości (wartość, którą wskazał miernik).

Wartość błędu granicznego jest w tym przypadku zależna od wartości wielkości mierzonej i nie jest stała na danym podzakresie miernika.

W niektórych analogowych elektronicznych przyrządach pomiarowych można spotkać się z wyrażeniem opisującym zależność błędu granicznego pomiaru danym przyrządem zarówno od wartości mierzonej X_m , jak i od wartości nominalnej zakresu pomiarowego X_N .

Wyrażenie to jest na ogół podawane w postaci:

$$\Delta_g X = a_{\%} X_m + b_{\%} X_N$$

gdzie: a , b – stałe charakterystyczne dla danego przyrządu.

Taki sposób opisu właściwości dokładnościowych miernika jest stosowany wtedy, gdy odpowiednią zależność udało się wykryć w procesie produkcyjnym przyrządu.

Podane sposoby wyznaczania błędów granicznych przyrządów są słuszne dla przyrządów analogowych z liniową podziałką (amperomierze, woltomierze). W przypadku przyrządów z nieliniową podziałką (omomierze) sposób wyznaczania błędu granicznego jest bardziej złożony (patrz: podrozdział 7.1 poświęcony omomierzom analogowym).

3. SPOSOBY WYRAŻANIA DOKŁADNOŚCI PRZYRZĄDÓW CYFROWYCH

Określanie błędów wskazań przyrządów analogowych (wskazówkowych) i cyfrowych różni się zasadniczo sposobem. W przypadku przyrządów cyfrowych błędy wykonywanych nimi pomiarów oblicza się w odmienny sposób. Przede wszystkim nie występuje tu pojęcie klasy dokładności, a informacje dotyczące dokładności podawane przez producentów, są dość obszernym zbiorem różnorodnych liczb. Dzieje się tak dlatego, że produkowane przyrządy cyfrowe skupiają w sobie wiele różnych funkcji pomiarowych – stąd ich nazwa – multimetry.

Przeciętny multimetr pozwala na pomiar napięć i prądów stałych i zmiennych oraz rezystancji. Bardziej złożone przyrządy tego rodzaju mierzą dodatkowo indukcyjność, pojemność elektryczną, częstotliwość, temperaturę, itp.

Dokładność cyfrowych przyrządów pomiarowych określana jest w sposób bardziej złożony niż elektrycznych mierników wskazówkowych. Nie istnieje tu pojęcie klasy dokładności, tak charakterystycznej dla przyrządów wskazówkowych. Poza tym brak jest jednolitego sposobu podawania przez różnych wytwórców granicznych błędów wskazań charakteryzujących dokładność ich wyrobów. Sposób określania błędów jest w dodatku różny dla poszczególnych funkcji pomiarowych w ramach tego samego przyrządu (np. inny dla pomiaru napięć stałych, a inny dla napięć zmiennych).

Należy dodać, że renomowane firmy produkujące aparaturę pomiarową najwyższej klasy, podają wartości błędów wskazań swoich produktów, zastrzegając jednocześnie, że wartości te gwarantowane są tylko w określonym przedziale czasu, po upływie którego powinny być ponownie poddane sprawdzeniu u wytwórcy.

Dokładność przyrządu cyfrowego, określająca jego błąd graniczny dopuszczalny, może być przedstawiana wyrażeniem:

$$\pm (a\% \text{ wartości mierzonej} + n \text{ cyfr}) \quad (1)$$

Pierwszy składnik przedstawia sobą tzw. składową analogową błędów o wartości względnej $a\%$, drugi – tzw. składowa cyfrowa błędów, jest wartością bezwzględną. W zależności od potrzeb przedstawione wyrażenie służy do obliczenia wartości bezwzględnej błędów granicznych lub jego wartość względną.

Jak rozumieć składnik „ n cyfr”? Jest to wartość wynikająca ze zwielokrotnienia b razy rozdzielczości przyrządu cyfrowego - $\Delta_r X$, czyli:

$$n \text{ cyfr} \equiv n \cdot \Delta_r X$$

Rozdzielczość jest cechą wszystkich przyrządów i określa ich zdolność do rozróżniania bliskich sobie wartości wielkości mierzonej. Dla przyrządów cyfrowych rozdzielczość jest określona wartością jednostki (kwantu) wielkości mierzonej, wskazywanej przez ostatni wskaźnik pola odczytowego. Dla przyrządów wielozakresowych rozdzielczość zależy od zakresu pomiarowego na którym wykonywany jest pomiar:

np. dla odczytu 126,6 V przyrząd ma rozdzielczość $\Delta_r U = 0,1 \text{ V}$;

dla odczytu 75,36 mV przyrząd ma rozdzielczość $\Delta_r U = 0,01 \text{ mV} = 10 \mu\text{V}$.

Jest regułą, że im mniejszy zakres pomiarowy, tym „większa” rozdzielczość (jest rozróżniana mniejsza wartość).

Parametrem charakteryzującym przyrząd cyfrowy jest rozdzielczość cyfrowa, określająca maksymalną liczbę cyfr znaczących wyświetlanego wyniku, niezależnie od wybranego podzakresu pomiarowego (wartość ta może być różna dla różnych funkcji pomiarowych). Rozdzielczość cyfrowa przyrządu może być wyrażona liczbą całkowitą lub liczbą mieszaną, której część ułamkowa może wynosić $\frac{1}{2}$ lub $\frac{3}{4}$. W przypadku, gdy część ułamkowa wynosi $\frac{1}{2}$ to na najbardziej znaczącej pozycji wyświetlacza może zostać wyświetlone cyfry 0 lub 1 (czasami również 2), natomiast w sytuacji gdy część

ułamkowa wynosi $\frac{3}{4}$ to na pozycji najbardziej znaczącej cyfry mogą zostać wyświetlone wartości 0, 1, 2, lub 3 (czasami również 4).

Przykład 1.

Jeżeli rozdzielczość cyfrowa woltomierza wynosi 4 cyfry to wynik pomiaru może mieć maksymalnie 4 cyfry znaczące, **nie oznacza to**, że każdy wynik pomiaru wykonanego tym woltomierzem będzie miał 4 cyfry znaczące. Na danym podzakresie pomiarowym rozdzielczość pomiaru będzie taka sama, czyli np. na zakresie 5 V możemy otrzymać następujące wyniki: 4,345 V (4 cyfry znaczące); 0,654 V (3 cyfry znaczące); 0,076 V (2 cyfry znaczące) itp. Uzyskane wyniki zapisane są różną liczbą cyfr znaczących ale ich rozdzielczość jest taka sama i wynosi 0,001 V.

Przykład 2.

Jeśli rozdzielczość przyrządu wynosi $5\frac{1}{2}$ cyfry oznacza to, że w wyniku pomiaru na pięciu mniej znaczących pozycjach wyświetlacza mogą wystąpić cyfry od 0 do 9 natomiast na najbardziej znaczącej (szóstej) pozycji – wyłącznie wartości 0 lub 1 (ewentualnie 2).

Przykład 3.

Jeśli rozdzielczość przyrządu wynosi $4\frac{3}{4}$ cyfry oznacza to, że w wyniku pomiaru na czterech mniej znaczących pozycjach wyświetlacza mogą wystąpić cyfry od 0 do 9 natomiast na najbardziej znaczącej (piątej) pozycji – wyłącznie wartości 0, 1, 2, 3 (ewentualnie 4).

Wyróżnia się również pojęcie rozdzielczości cyfrowej wyświetlacza, która również informuje o tym iloma maksymalnie cyframi znaczącymi może zostać wyświetlony wynik pomiaru. Jednak zapisywana jest ona tylko liczbami całkowitymi, czyli np. przy rozdzielczości cyfrowej przyrządu wynoszącej $4\frac{3}{4}$ rozdzielczość cyfrowa wyświetlacza powinna wynosić 5 cyfr, po to aby wszystkie cyfry znaczące wyniku pomiaru mogły zostać wyświetlone.

Błąd graniczny dopuszczalny wyrażony wartością bezwzględną oblicza się z zależności:

$$\Delta_g X = \frac{a\% X}{100\%} + b \cdot \Delta_r X$$

Przykład 4.

Dokładność przyrządu przedstawiono zależnością: $0,5\%U_x + 2$ cyfry. Pomiar wykonano na zakresie pomiarowym 2,000 V; odczyt wynosił $U_x = 1,658$ V. Podać błąd graniczny przyrządu w tym pomiarze.

Dla wykonanego pomiaru rozdzielczość wynosiła $\Delta_r U = 0,001$ V, w związku z tym:

$$\Delta_g U = \frac{0,5\% 1,658}{100\%} + 2 \cdot 0,001 = 0,0083 + 0,002 = 0,0103 = 0,010$$

Drugi sposób zapisu błędu przyrządu cyfrowego przedstawia wyrażenie:

$$\pm (a\% \text{ odczytu} + b\% \text{ zakresu}) \quad (2)$$

W związku z tym, wzór obliczeniowy na błąd graniczny dopuszczalny ma postać:

$$\Delta_g X = \frac{a\% X}{100\%} + \frac{b\% X_z}{100\%}$$

Warto zauważyć, że w pomiarach wartości bliskich zakresowi w błędzie granicznym dominuje składowa analogowa, natomiast w pomiarach wartości małych względem zakresu, przeważa składowa cyfrowa błędu. Stąd podobnie jak w przyrządach analogowych, pomiary powinny być wykonane przy jak najpełniejszym „wypełnieniu” pola odczytowego. Mówiąc inaczej, dobór właściwego zakresu pomiarowego przyrządu cyfrowego jest tak samo ważny jak w przyrządach analogowych.

Przykład 5.

Dokładność przyrządu przedstawia zależność: $0,5\%U_x + 0,1\%U_z$. Wskazanie wynosiło 102,3 mV. Odczytu dokonano na zakresie 200 mV.

Błąd graniczny bezwzględny wynosi:

$$\Delta_g U = \frac{0,5\% \cdot 102,3mV}{100\%} + \frac{0,1\% \cdot 200mV}{100\%} = 0,5115 + 0,2 = 0,71mV$$

Uwaga:

Dla przyrządów cyfrowych o dużej dokładności wartości współczynników procentowych a i b w wyrażeniach (1) i (2) mogą być wyrażone nie w procentach ale w „częściach milionowych” – ppm (ang. part per milion). W takim przypadku zamiana wartości współczynników a i b na ułamek polega na podzieleniu ich przez 1 000 000 a nie przez 100 jak w przypadku wartości podanych w procentach.

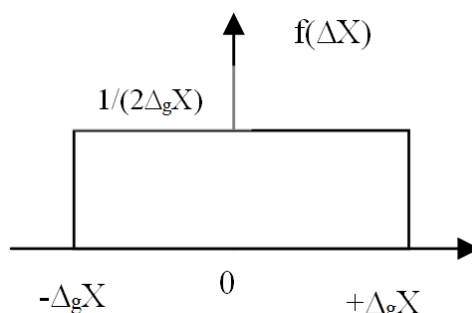
4. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW BEZPOŚREDNICH JEDNOKROTNYCH

O końcowej niepewności pomiaru bezpośredniego decydują błędy przyrządów pomiarowych, metody, eksperymentatora i czynniki zewnętrzne. Jeżeli jednak pomiar zostanie wykonany starannie, przebiegać będzie w warunkach odniesienia, a przyrząd został tak dobrany, aby błąd metody był pomijalny, to na niepewność pomiaru będzie wpływać tylko błąd podstawowy przyrządu oraz czynniki losowe, których wpływ można oszacować przeprowadzając serię pomiarów. Zatem w przypadku starannie wykonanych pomiarów jednokrotnych można się ograniczyć do oszacowania niepewności typu B związanej z błędem przyrządu.

Teoria niepewności pomiaru zakłada, że każdy odczyt, nawet pojedynczy, ma cechy zdarzenia losowego, a więc podlega prawom statystyki. Inaczej mówiąc, można mu przypisać właściwości statystyczne, określone m.in. prawdopodobieństwem jego wystąpienia.

Podstawową cechą zdarzeń losowych jest możliwość ich opisu za pomocą funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zdarzenia. W pomiarach zdarzeniem jest pojedynczy odczyt lub też błąd tego odczytu.

Dla przyrządów pomiarowych za najbardziej odpowiednią funkcję rozkładu prawdopodobieństwa błędów przyjmuje się tzw. rozkład jednostajny zwany też prostokątnym, przedstawiony na poniższym rysunku.



Rys. 1. Wykres przedstawiający funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jednostajnego błędu przyrządu ($\Delta_g X$ – błąd graniczny)

Z ogólnych zasad tworzenia funkcji rozkładu wynika, że dla rozkładu jednostajnego jest ona ograniczona wartościami błędu granicznego dopuszczalnego, a jej wartość jest stała i wynosi $1/(2 \Delta_g X)$ (pole pod funkcją ma wartość jednostkową). Przyjęcie dla przyrządów takiej funkcji oznacza, że w pojedynczym pomiarze przyrząd ma rzeczywisty błąd o wartości należącej do przedziału $\pm \Delta_g X$, przy czym, wystąpienia każdej wartości błędu ma jednakowe prawdopodobieństwo.

Odnosząc to do wartości mierzonej, uzyskuje się przedział wartości $X \pm \Delta_g X$, w którym występuje wartość poprawna z prawdopodobieństwem równym pewności.

Parametrem opisującym dowolny rozkład prawdopodobieństwa jest **odchylenie standardowe**, które w przypadku rozkładu jednostajnego wynosi:

$$s = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

Dla potrzeb pomiarowych odchylenie standardowe przyjęto nazywać **niepewnością standardową** i oznaczana jest małą literą u z dolnym indeksem A lub B w zależności od typu niepewności. Niepewność

oszacowana na podstawie błędu przyrządu pomiarowego jest niepewnością typu B. Zatem pamiętając o przyjętych założeniach, można zapisać, że:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

Czasami przyjmowany jest rozkład trójkątny błędów przyrządu. Wtedy w powyższych wzorze mianownik przyjmie wartość $\sqrt{6}$.

Niepewność standardowa może również zostać wyrażona wartością względną, którą oznacza się symbolem $u_r(X)$ i wyznacza się jako stosunek niepewności standardowej bezwzględnej do wartości zmierzonej wyrażony w procentach:

$$u_r(X) = \frac{u(X)}{X} \cdot 100\%$$

Niepewność standardowa rozkładu jednostajnego zawęża przedział prawdopodobnych błędów do ok. 58% wartości błędu granicznego przyrządu. W związku z tym, przyjęcie niepewności standardowej do oceny dokładności pomiaru daje zbyt małe zaufanie do wyniku pomiaru. Z tego powodu w wyniku końcowym pomiaru uwzględnia się **niepewność rozszerzoną** - wynikającą z pomnożenia niepewności standardowej przez tzw. **współczynnik rozszerzenia k**. Niepewność rozszerzoną bezwzględną oznacza się dużą literą U . Pamiętając o przyjętych założeniach, dla pomiarów bezpośrednich jednokrotnych można zapisać, że:

$$U(X) = k \cdot u_B(X)$$

W rozpatrywanym przypadku współczynnik rozszerzenia przyjmuje wartość:

$$k = p \cdot \sqrt{3}$$

gdzie p – jest przyjętym poziomem ufności wyniku pomiaru, który wyraża prawdopodobieństwo wystąpienia wartości rzeczywistej w przedziale od $X-U(X)$ do $X+U(X)$.

Dokładności pomiaru określa niepewność (rozszerzona) względna, wyrażona w procentach:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X} 100\%$$

5. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW BEZPOŚREDNICH WIELKROTNYCH

Zajmijmy się teraz szacowaniem niepewności serii pomiarów bezpośrednich. W takim przypadku możemy oszacować zarówno niepewność typu B w oparciu o wiedzę eksperymentatora na temat użytych przyrządów, wykorzystanych metod i jego doświadczenia jak i niepewność typu A na podstawie rozrzutu uzyskanych wyników.

Oszacowanie niepewności standardowej typu A

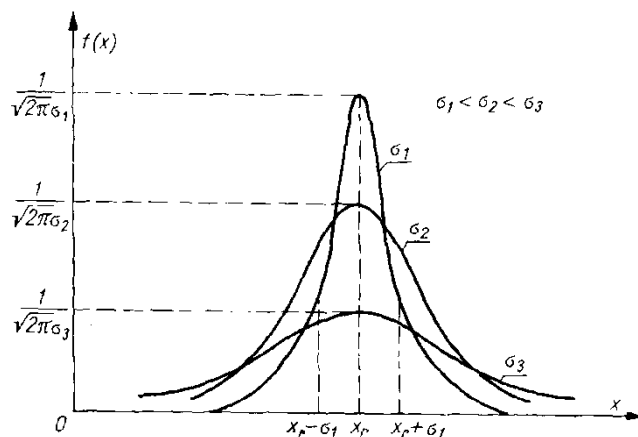
Niepewność typu A wyraża wpływ czynników przypadkowych na wynik pomiaru i może zostać oszacowana na podstawie wielokrotnego powtórzenia pomiaru tej samej wartości wielkości pomiarowej (serii pomiarowej). Z uwagi na fakt, że wyniku pomiaru obarczonego błędem przypadkowym nie da się przewidzieć, przyjmuje się, że jest on zmienną losową (najczęściej ciągłą). W procesie pomiaru zmienna ta przyjmuje tylko jedną konkretną wartość; z określonym prawdopodobieństwem możliwe są jednak również wartości inne. Ze względu na potwierdzone doświadczalnie założenia mówiące, że przy odpowiednio dużej liczbie pomiarów ($n > 30$):

- błędy równe co do wartości bezwzględnej, ale o przeciwnych znakach zdarzają się jednakowo często,
- prawdopodobieństwo wystąpienia błędu dodatniego równe jest prawdopodobieństwu wystąpienia błędu ujemnego,
- częstość występowania błędów małych jest większa niż błędów dużych,
- błędy są zdarzeniami niezależnymi,

zmienna losowa X tworząca wynik pomiaru charakteryzuje się ściśle określonym rozkładem prawdopodobieństwa, zwanym rozkładem Gaussa. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa określona jest poniższym wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_r)^2}{2\sigma^2}\right]$$

w którym jako x_r traktuje się wartość rzeczywistą wartości mierzonej. Parametr $\sigma > 0$ jest miarą rozrzutu wartości tak określonej zmiennej losowej i nosi nazwę odchylenia standardowego. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa, nazywanego również normalnym, przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Przykłady funkcji Gaussa dla różnych wartości odchylenia standardowego

Podczas wykonywania pomiarów wartość rzeczywista x_r wielkości mierzonej nie jest znana, ale można wykazać, że jej wartością najbardziej prawdopodobną ze statystycznego punktu widzenia jest średnia arytmetyczna serii n pomiarów:

$$X_s = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Drugi parametr rozkładu zmiennej losowej jako wyniku pomiaru, odchylenie standardowe σ , może być wyznaczony ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_s)^2}{n-1}}$$

jako odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru. Oczywiście samą średnią arytmetyczną X_s serii pomiarów można też traktować jako zmienną losową (licząc średnie z kilku serii pomiarowych uzyskuje się różniące się wartości).

Teoria prawdopodobieństwa stwierdza, że odchylenie standardowe średniej jest $\sqrt{n}$ razy mniejszy od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_s)^2}{n(n-1)}}$$

Dla potrzeb pomiarowych, powyższy parametr nazywany jest niepewnością standardową typu A i oznaczany symbolem $u_A(X)$.

Oszacowanie niepewności standardowej typu B

Jeżeli pomiar zostanie wykonany starannie, przebiegać będzie w warunkach odniesienia, a przyrząd został tak dobrany, aby błąd metody był pomijalny to jedynym czynnikiem systematycznym będzie niedokładność przyrządu pomiarowego. Przyjmując równomierny rozkład błędu przyrządu, niepewność standardowa typu B opisuje poniższa zależność:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}$$

gdzie $\Delta_g X$ to błąd graniczny przyrządu pomiarowego wyznaczony przy założeniu, że wartość zmierzona była równa wartości średniej X_s wyznaczonej na podstawie wyników serii pomiarowej.

Oszacowanie niepewności standardowej złożonej

Na podstawie niepewności standardowych typu A i B wyznacza się niepewność złożoną $u_c(X)$ korzystając z poniższej zależności:

$$u_c(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_B^2(X)}$$

Jeżeli jedna z niepewności ma wartość dużo mniejszą od drugiej (minimum 10 razy) to może zostać ona pominięta. Zatem:

- w przypadku, gdy $u_A(X) \gg u_B(X)$ można przyjąć, że $u_c(X) = u_A(X)$,
- natomiast w sytuacji odwrotnej, gdy $u_B(X) \gg u_A(X)$ można przyjąć, że $u_c(X) = u_B(X)$.

Oszacowanie niepewności rozszerzonej

Niepewność rozszerzoną, oznaczaną symbolem $U(X)$, wyznacza się mnożąc niepewność standardową złożoną przez tzw. współczynnik rozszerzenia k :

$$U(X) = k \cdot u_c(X)$$

Wyznaczenie współczynnika rozszerzenia realizuje się porównując otrzymane wartości niepewności standardowych typu A i B według następujących zasad:

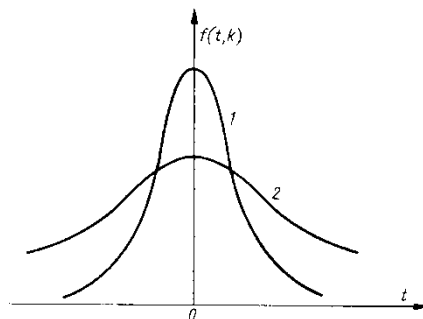
1. W przypadku gdy niepewność typu A jest znacząco większa (kilka razy) od niepewności typu B to współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności p określa się korzystając z tablic rozkładu normalnego. Poniżej wymienione są najczęściej przykładowe poziomy ufności oraz odpowiadające im współczynniki rozszerzenia k dla rozkładu normalnego:

- $p = 68\%$, $k = 1$;
- $p = 95\%$, $k = 2$;
- $p = 99,7\%$, $k = 3$.

W sytuacji gdy liczba wykonanych pomiarów w serii jest mała ($n < 30$) współczynnik rozszerzenia należy określać na korzystając z tablic rozkładu t-Studenta (zwanego również rozkładem t lub rozkładem Studenta) na podstawie przyjętego poziomu ufności oraz liczby stopni swobody. Liczba stopni swobody, oznaczana symbolem ν , jest parametrem rozkładu t-Studenta i jest zależna od liczby pomiarów n :

$$\nu = n - 1$$

Rozkład t-Studenta o mniej niż 30 stopniach swobody znacznie odbiega od rozkładu normalnego. Wykres zamieszczony na rysunku 3 przedstawia funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego i rozkładu t-Studenta wyznaczonych na podstawie wyników małolicznej serii pomiarowej. Można zauważyć, że przy takich samych wartościach pozostałych parametrów, czyli wartości średniej i odchylenia standardowego, rozkład t-Studenta o małej liczbie stopni swobody jest bardziej płaski niż rozkład normalny.



Rys. 3. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (1) i rozkładu t-Studenta (2) wyznaczone na podstawie k wyników małolicznej serii pomiarowej

2. W przypadku gdy niepewność typu B (wyznaczona w oparciu o błąd przyrządu pomiarowego) jest znacząco większa (kilka razy) od niepewności typu A to współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności p określa się na podstawie założonego rozkładu błędów przyrządu, czyli:

- w przypadku przyjęcia rozkładu jednostajnego współczynnik rozszerzenia ma wartość:

$$k = p \cdot \sqrt{3}$$

- natomiast, w sytuacji gdy przyjęty został rozkład trójkątny błędów przyrządu wartość współczynnika rozszerzenia wynosi:

$$k = p \cdot \sqrt{6}$$

3. W przypadku gdy niepewności obu typów mają porównywane wartości, można przyjąć współczynnik rozszerzenia dla przyjętego poziomu ufności na podstawie tablic rozkładu normalnego.

Oszacowanie niepewności rozszerzonej względnej

Wartość niepewności rozszerzonej względnej szacuje się według ogólnej zależności, przyjmując jako wartość zmierzoną wartość średnią z pomiarów:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X_s} \cdot 100\%$$

Zapis wyniku końcowego pomiaru

Wynik końcowy pomiaru zapisuje się zgodnie z ogólnie obowiązującymi regułami, przyjmując wartość średnią serii pomiarowej jako wartość zmierzoną.

6. SPOSÓB PRZEDSTAWIANIA WYNIKU POMIARU

Wynik pomiaru przedstawia wartości mierzonej wielkości i niepewność jej wyznaczenia. Prawidłowa forma zapisu wyniku pomiaru ma ogólną postać następującą:

$$X = [x \pm U(X)] [X], \quad p = \dots\dots\dots$$

w której: X – symbol mierzonej wielkości,

x – wartość mierzonej wielkości,

U(X) - niepewność (rozszerzona) pomiaru, przedstawiona wartością bezwzględną,

[X] - jednostka miary mierzonej wielkości,

p - przyjęty w ocenie niepewności wyniku pomiaru poziom ufności.

Dokładności pomiaru określa niepewność (rozszerzona) względna, wyrażona w procentach:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X} 100\%$$

Zapis wyniku pomiaru wyznacza przedział wartości [x - U(X), x + U(X)], wewnątrz którego prawdopodobnie występuje wartość rzeczywista (poprawna) - przy czym, prawdopodobieństwo jej wystąpienia jest określone podanym poziomem ufności.

W obliczeniach niepewności przyjmuje się typowe wartości poziomów ufności p: 0,68; 0,95; 0,99; 0,997. Poziom ufności 0,997 graniczy z pewnością, w pomiarach jest rzadko przyjmowany. Dla pomiarów wielkości elektrycznych wykonywanych z umiarkowaną dokładnością najczęściej przyjmuje się p = 0,95.

W przedstawianiu wyników pomiarów należy unikać wyrażania wartości liczbowych za pomocą „długich”, a stąd mało czytelnych liczb. Stosując tzw. **wielokrotności lub podwielokrotności jednostek miary** uzyskuje się liczby „przyjazne” do odczytu o wartościach z przedziału 0,1 - 1000, np. Mało czytelną wartość 1 365 000 Ω, należy zapisać 1,365 MΩ. Najczęściej stosowane wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar przedstawia poniższa tablica.

Mnożnik	Przedrostek	Oznaczenie	Przykład
10 ¹²	tera	T	21,6 TΩ
10 ⁹	giga	G	120 GΩ
10 ⁶	mega	M	1,25 MW
10 ³	kilo	k	400 kV
10 ⁻³	mili	m	854 mA
10 ⁻⁶	mikro	μ	3,650 μH
10 ⁻⁹	nano	n	10,4 nF
10 ⁻¹²	piko	p	0,74 pA

Opracowanie końcowego wyniku pomiaru należy rozpocząć od uproszczenia niepewności pomiaru, potem zaś – to samo zrobić z wartością surową wielkości mierzonej. W uproszczeniu niepewności należy kierować się poniższymi regułami.

Reguła I

**Niepewność przedstawia się liczbą z 2 cyframi znaczącymi.
Jeżeli rozdzielczość pomiaru nie pozwala na to,
to należy niepewność przedstawić liczbą z 1 cyfrą znaczącą.**

Przykład 2: Uprościć surowe niepewności pomiarów:

$$U(I) = 0,1203 \text{ A} = 0,12 \text{ A}$$

$$U(U) = 126,8 \text{ mV} = 130 \text{ mV} = 0,13 \text{ V}$$

$$U(R) = 67,5 \Omega = 68 \Omega$$

Przykład 3: Zaokrąglanie niepewności względnych podlega takim samym regułom.

$$U_r(I) = 1,365\% = 1,4\%$$

$$U_r(U) = 0,3551\% = 0,36\%$$

$$U_r(R) = 0,01365\% = 0,014\% = 1,4 \cdot 10^{-2} \%$$

Zaokrąglanie wartości mierzonej podlega następującym regułom:

Reguła II

**Ostatnia cyfra znacząca wartości zmierzonej
powinna występować na pozycji dziesiętnej
ostatniej cyfry znaczącej niepewności.**

Przykład 4: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(R) = 63,3 \Omega = 63 \Omega$, $R = 1263,85 \Omega = 1264 \Omega$.

Wynik pomiaru: $R = (1264 \pm 63) \Omega$

Przykład 5: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(U) = 0,07305 \text{ V} = 0,073 \text{ V}$,

$$U = 76,3581 \text{ V} = 76,358 \text{ V}.$$

Wynik pomiaru: $U = (76,358 \pm 0,073) \text{ V}$

Przykład 6: Zapisać wynik pomiaru jeżeli: $U(I) = 72,63 \text{ m} = 73 \text{ m}$, $l = 5326,5 \text{ m} = 5326 \text{ m}$.

Wynik pomiaru: $l = (5326 \pm 73) \text{ m} = \underline{(5,326 \pm 0,073) \text{ km}}$.

Przykład 7: Przedstawić wynik pomiaru jeżeli: $U(U) = 374,2 \text{ V} = 370 \text{ V} = 3,7 \cdot 10^2 \text{ V}$,

$$U = 18243 \text{ V} = 18240 \text{ V}.$$

Wynik pomiaru: $U = (182,4 \pm 3,7) \cdot 10^2 \text{ V} = \underline{(18,24 \pm 0,37) \text{ kV}}$.

Jak już stwierdzono wcześniej, w pomiarach o małej rozdzielczości, zwykle też mało dokładnych, występuje konieczność przedstawienia niepewnością z 1 cyfrą znaczącą. Wtedy w poprawnym zapisie wyniku pomiaru należy uwzględnić następująca regułę:

Reguła III

**Niepewność przedstawiona 1 cyfrą znaczącą
powinna mieć wartość większą niż przed zaokrągleniem
(mówimy o zaokrągleniu liczby „w górę”).**

Wyjątek: Niepewność należy zaokrąglić „w dół”,
jeżeli jej wartość nie zmniejszy się więcej niż o 10%.

Przykład 8: Dokonano odczytu napięcia: $U = 126 \text{ V}$. Obliczona dla tego pomiaru niepewność wynosiła: $U(U) = 1,65 \text{ V}$. Ze względu na istniejącą rozdzielczość odczytu - wynoszącą 1V, niepewność należy zaokrąglić do liczby z 1 cyfrą znaczącą, czyli

$$U = (126 \pm 2) \text{ V}$$

Uwaga: Nie ma sensu przedstawiać powyższego wyniku pomiaru z niepewnością zapisaną 2 cyframi znaczącymi i z dopisanym do wartości mierzonej zerem, czyli $U = (126,0 \pm 1,6) \text{ V}$. Zapis