

1. PROTOKÓŁ POMIAROWY

Nieodzowną częścią każdego ćwiczenia laboratoryjnego jest sporządzenie właściwej jego dokumentacji. Z reguły zbiór podstawowych dokumentów obejmuje wypełniany w trakcie wykonywania pomiarów protokół oraz sporządzone na jego podstawie sprawozdanie, stanowiące ostateczne podsumowanie przeprowadzonych pomiarów. Protokół pomiarowy jest dokumentem, który należy prowadzić na bieżąco z wykorzystaniem wcześniej przygotowanego formularza. Powinien on być zwięzły, ale jednocześnie zawierać taką ilość informacji o przeprowadzonym eksperymencie i warunkach w jakich się on odbywał, aby mógł być zrozumiały przez inne osoby nie biorące bezpośredniego udziału w pomiarach.

Wyniki odczytane z przyrządów powinny być natychmiast notowane. Z uwagi na możliwość powstania błędów, niedopuszczalne jest jakiegokolwiek przeliczanie ich w pamięci przed wpisaniem do protokołu. Kolejność czynności powinna być następująca: odczyt – zapis – sprawdzenie odczytu z zapisem. Niewskazane jest również przepisywanie protokołu, głównie ze względu na powstające wówczas pomyłki, przeinaczenia, pomijanie tych wyników, które wydają się mniej ważne lub błędne. Na odrzucenie danego wyniku można decydować się dopiero na etapie ostatecznego sprawozdania, po wykonaniu stosownych obliczeń i rozważeniu wszystkich warunków wykonania eksperymentu.

Mimo wymogów wypełniania na bieżąco, protokół powinien być prowadzony starannie. Niechlujne lub nieczytelne notowanie wyników jest częstym powodem błędnych interpretacji i świadczy o niskiej kulturze technicznej eksperymentatora. Do podstawowych informacji, które z reguły powinny znaleźć się w każdym protokole należą:

- 1) dane dotyczące osoby lub osób przeprowadzających pomiary, miejsce, data i temat, zestawione najczęściej w formie odpowiedniej tabeli nagłówkowej,
- 2) cel pomiarów,
- 3) niezbędne dane teoretyczne o przeprowadzanych pomiarach (jeśli wymagane),
- 4) wykaz aparatury, najlepiej sporządzony w formie odpowiedniej tabeli,
- 5) ponumerowane schematy układów pomiarowych, umieszczone pod odpowiednimi punktami pomiarowymi,
- 6) wyniki pomiarów sporządzone, o ile to jest tylko możliwe, w postaci tabeli zaopatrzonej w numer i tytuł. Tabela jest najbardziej jasną i zwięzłą formą zapisu. Każda kolumna lub każdy wiersz w tabeli powinny być oznaczone symbolem wielkości, której wartości one zawierają, symbolem jednostki, w której te wartości są podawane oraz numerem porządkowym.

2. ZASADY OPRACOWANIA SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie z przeprowadzonych pomiarów tworzy się na podstawie oryginalnego protokołu pomiarów. W zależności od wymagań stawianych autorowi, może ono przybierać różne formy. Najczęściej jednak obejmuje następujące części składowe:

- 1) tabelę nagłówkową zawierającą dane o autorze, dacie wykonania i tytuł,
- 2) streszczenie będące zwięzłą prezentacją całej treści,
- 3) krótki opis podstaw teoretycznych przeprowadzanego doświadczenia (lub doświadczeń przypisanych do odpowiednich punktów pomiarowych protokołu) z uwzględnieniem zwięzłej prezentacji zastosowanych metod pomiarowych,
- 4) opracowane wyniki pomiarów – wyniki wykonanych obliczeń, przykładowe obliczenia, wykresy,
- 5) dyskusję otrzymanych wyników.

3. POJĘCIA PODSTAWOWE

Wielkość mierzona - właściwość zjawiska, ciała lub substancji, którą można rozróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo.

Wartość wielkości - wyrażenie wielkości w postaci liczby i odpowiedniej jednostki miar.

Jednostka miary - umownie przyjęta wartość jednostkowa wielkości.

Pomiar - zespół czynności mających na celu wyznaczenie wartości wielkości; polega na porównaniu wielkości mierzonej z wzorcem tej wielkości i wyznaczeniu ilościowej relacji między nimi. Pomiarów wykonywanych są za pomocą przyrządów pomiarowych.

Wzorzec miary – przyrząd pomiarowy odtwarzający jednostkę miary wielkości; może też odtwarzać inne wartości.

Wynik pomiaru - wartość wielkości otrzymana w czasie pomiaru; odczyt wskazania przyrządu nazywa się wynikiem surowym.

(Nie)dokładność pomiaru - terminy zwykle stosowane w znaczeniu ogólnym, wyrażające stopień zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą (poprawną) wielkości mierzonej. Ścisłą ocenę niedokładności pomiaru można wykonać dwoma sposobami: tradycyjnym - opartym na pojęciu błędu granicznego lub obecnie zalecanym - opartym na pojęciu niepewności standardowej.

Pomiar metodą bezpośrednią - wynik pomiaru uzyskany bezpośrednio ze wskazań przyrządu pomiarowego (np. pomiar napięcia woltomierzem).

Pomiar metodą pośrednią - wynik pomiaru uzyskany z pomiarów innych wielkości, powiązanych formalnym związkiem z wielkością mierzoną (np. pomiar rezystancji metodą woltomierza i amperomierza, gdzie wynik pomiaru określa prawo Ohma: $R = U/I$).

4. WŁAŚCIWOŚCI POMIARÓW PRZYRZĄDAMI ANALOGOWYMI

Na czynności pomiarowe składają się

- teoretyczne i praktyczne przygotowanie pomiaru,
- techniczna realizacja pomiaru,
- opracowanie i ocena wyniku.

Pomiary powinny być zawsze poprzedzone rozpoznaniem obiektu pomiaru, na tyle starannym, na ile jest to potrzebne do doboru odpowiedniej metody pomiarowej i właściwych przyrządów pomiarowych. Metodę pomiarową dobiera się na podstawie szacunkowej oceny rzędu wartości mierzonej wielkości oraz pożądanej dokładności pomiaru. Zestawione w układ pomiarowy przyrządy pomiarowe urzeczywistniają metodę pomiarową i bezpośrednio wpływają na dokładność pomiarów.

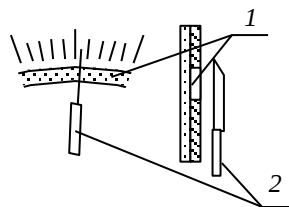
Metoda pomiaru bezpośrednia, realizowana za pomocą przyrządów analogowych, gwarantuje umiarkowany poziom dokładności, w najlepszym przypadku około 0,5% dla pomiarów przyrządami klasy 0,2. Ze względu na proste i szybkie pomiary przyrządy wskazówkowe są powszechnie stosowane w pomiarach wielu wielkości elektrycznych i nieelektrycznych o wartościach przeciętnych, przy tym biorąc pod uwagę pełny zakres mierzalności danej wielkości. Np. zakres mierzalności napięcia obejmuje wartości od 1 nV do setek kV, zaś woltomierze wskazówkowe mają zakresy od pojedynczych miliwoltów do 1 kV.

Dobór odpowiedniego przyrządu wskazówkowego musi uwzględniać jego rodzaj, zakres pomiarowy i klasę dokładności. W przypadku stosowania woltomierzy i amperomierzy - szczególnie wtedy, gdy obiekt pomiaru jest małej mocy- nie do pominięcia jest też ocena ich rezystancji wewnętrznych.

Przed przystąpieniem do pomiarów przyrządem wskazówkowym zawsze należy w nim sprawdzić położenie zerowe wskazówki i ewentualnie przeprowadzić czynności zerowania.

W przyrządach wielozakresowych i wielofunkcyjnych (tzw. **multimetrach**), przed włączeniem ich do obwodu należy nastawić właściwą funkcję pomiarową i dobrać odpowiedni zakres pomiarowy.

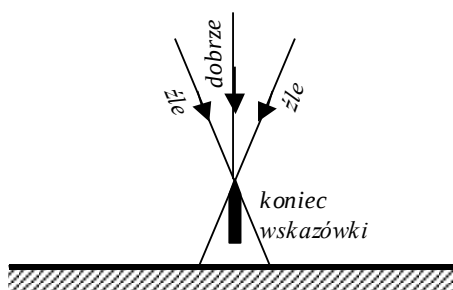
Wadą przyrządów analogowych jest możliwość niedokładnego odczytu wartości wskazywanej przez urządzenie odczytowe przyrządu. Urządzenie to składa się z podzielnicy, na której naniesiona jest podziałka oraz wskazówki – materialnej (rys.1) lub świetlnej (rys.3). **Podziałka** jest to uporządkowany zbiór znaków (najczęściej kresek – **wskazów**). Dla ułatwienia odczytu niektóre z tych znaków mogą być opisane cyframi. Część podziałki między sąsiednimi wskazami nazywamy **działką elementarną**. Inne znaczenie ma **działka obliczeniowa** lub krótko działka podziałki. O liczbie działek obliczeniowych informują opisy liczbowe stanowiące **ocyfrowanie podziałki** i najczęściej jest ona różna od liczby działek elementarnych. Długość podziałki oraz liczba działek są ściśle zależne od klasy oraz gabarytów miernika. Im klasa wyższa tym podziałka dłuższa, a liczba działek większa.



Rys.1. Wskazówka nożowa i skala lustrzana: 1 – lustro, 2 – wskazówka

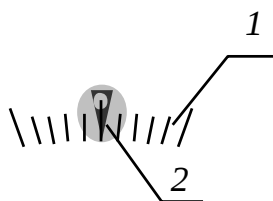
Charakterystyczną cechą przyrządów analogowych jest **zdolność rozdzielcza**, która określa najmniejszą część działki możliwą do odczytania. W zależności od odległości między sąsiednimi wskazami, przyjmuje się, że zdolność rozdzielcza wynosi 0.5, 0.2 lub 0.1 mm (działki). Przyjęcie zbyt małej zdolności rozdzielczej zwiększa błąd odczytu.

Błąd odczytu ma charakter błędu przypadkowego i jest zależny przede wszystkim od staranności eksperymentatora. Przy pomiarach jednokrotnych błąd taki jest trudny lub wręcz niemożliwy do oszacowania. Błąd odczytu może zostać także popełniony, jeśli eksperymentator nie patrzy na wskazówkę prostopadle do płaszczyzny podzielnicy. Jest to błąd krzywego patrzenia, nazywany także **błędem paralaksy**. Istotę tego błędu przedstawia rys. 2.



Rys.2. Sposób powstawania błędu paralaksy.

Błąd paralaksy można wyeliminować patrząc na wskazówkę prostopadle do podzielnicy. Ułatwia to umieszczone pod wskazówką lustro (rys.2) lub stosowanie wskazówki świetlnej (rys.3). **Wskazówka świetlna** powstaje na zasadzie odbicia światła z żarówki od lustreczka, na którym jest naniesiony znacznik wskazówki. Lustreczko jest przymocowane do osi, której kąt odchylenia od położenia równowagi zależy od wartości wielkości mierzonej. Przemieszczająca się wzdłuż podziałki plamka uniemożliwia powstanie błędu paralaksy, ponieważ cień wskazówki znajduje się bezpośrednio na podzielnicy.



Rys.3. Skala i wskazówka świetlna: 1 – podziałka, 2 – plamka świetlna ze znacznikiem wskazówki

Odczytów wartości wskazań przyrządów wskazówkowych dokonuje się **bezpośrednio** w jednostkach wielkości mierzonej lub **pośrednio** przez odczyt liczby działek odchylenia wskazówki.

Jednym z podstawowych parametrów przyrządów analogowych (wskazówkowych) jest stała przyrządu. Jeżeli przyrząd jest wyposażony we wskaźnik, który ma naniesioną podziałkę liniową, to stała przyrządu jest równa stałej podziałki.

Stala podziałki jest to stosunek wartości nominalnej podzakresu pomiarowego X_N do maksymalnej liczby działek na podziałce przyrządu $\alpha_{\max}$.

$$S = \frac{X_N}{\alpha_{\max}}$$

W przyrządach o podziałce liniowej odczytu wartości mierzonej dokonuje się mnożąc liczbę działek α , o którą wychyliła się wskazówka przyrządu od położenia początkowego przez stałą podziałki S . Wynik pomiaru będzie więc równy

$$X_x = X_m = \alpha \cdot S = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} X_N$$

Wartości $\alpha_{\max}$ i α mogą być odczytywane w działkach elementarnych lub obliczeniowych ale nie można mieszać działek obliczeniowych z elementarnymi.

Jeżeli przyrząd ma podziałkę silnie nieliniową (różne odległości między kolejnymi działkami), to należy określić **stałą fragmentu podziałki**. Taka sytuacja zachodzi w omomierzach analogowych. Przyjmuje się założenie, że na podziałce nieliniowej można określić pewne przedziały, w których jest ona liniowa. Na ogół granice takich przedziałów są opisane działkami oznaczonymi liczbowo. Wynik pomiaru będzie równy

$$X_m = \alpha' \cdot S' + X_{\min} = \frac{\Delta X}{\Delta \alpha} \alpha' + X_{\min}$$

gdzie:

α' – liczba działek, o które odchyliła się wskazówka od początku rozpatrywanego przedziału;

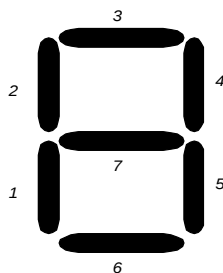
$\Delta \alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ – szerokość przedziału liniowego w działkach;

$\Delta X = X_{\max} - X_{\min}$ przyrost wartości wielkości mierzonej powodującej zmianę położenia wskazówki od położenia $\alpha_{\min}$ do $\alpha_{\max}$.

Z reguły w przyrządach analogowych o nieliniowej podziałce podzakres pomiarowy określany jest nie za pomocą wartości maksymalnej lecz poprzez mnożnik podzakresu. Wówczas, wykorzystanie odcyfrowania podziałki przy określaniu położenia wskazówki, czyli odczyt jej wychylenia w działkach obliczeniowych, znacząco ułatwia wyznaczenie wartości zmierzonej przy nieliniowej podziałce. W takim przypadku wystarczy tylko pomnożyć odczytaną liczbę działek obliczeniowych, określających wychylenie wskazówki przez mnożnik ustawionego podzakresu pomiarowego.

5. ODCZYT WARTOŚCI MIERZONEJ Z PRZYRZĄDÓW CYFROWYCH

Przyrządy cyfrowe są wygodniejsze w użyciu. Dzięki zastosowaniu wyświetlacza cyfrowego nie popełnia się subiektywnych błędów związanych z odczytem wskazań. Niestety pierwsze konstrukcje wyświetlaczy charakteryzują się dość dużą zawodnością a ich uszkodzenia mogły doprowadzić do powstania błędów grubych. Na wyświetlaczu oprócz cyfr składających się na wynik wyświetlany jest także przecinek lub kropka dziesiętna. Częstym problemem był brak separatora dziesiętnego ze względu na uszkodzenie wyświetlacza. Warto także przyjrzeć się konstrukcji wyświetlacza pojedynczej cyfry. Jego wygląd przedstawiono na rys.4. Łatwo zauważyć, że uszkodzenie segmentu 7 spowoduje nie rozróżnianie cyfr 8 i 0. Natomiast uszkodzenie segmentu czwartego uniemożliwi rozróżnienie cyfr 6 i 8. Zanim użytkownik zorientuje się o takim uszkodzeniu może minąć sporo czasu a pomiary będą niewłaściwe. Nowoczesne wyświetlacze cyfrowe typu LCD są dużo bardziej niezawodne i pozbawione przedstawionych wad swoich poprzedników.



Rys.4. Wyświetlacz siedmiosegmentowy

6. ROZDZIELCZOŚĆ POMIARU

Jest w pomiarach ważną wielkością, gdyż wynika z niej tzw. **błąd rozdzielczości**, wpływający na dokładność pomiarów. Rozdzielczość pomiaru jest wyrażana w jednostkach wielkości mierzonej i określa najmniejszą zmianę wartości mierzonej, na którą reaguje przyrząd.

Dla przyrządu wskazówkowego rozdzielczość pomiaru zależy od jego klasy dokładności i jest związana z dokładnością odczytu. Dla klas laboratoryjnych (0,2 i 0,5) rozdzielczość pomiaru odpowiada wartości 0,1 lub 0,2 działki elementarnej. Dla klas technicznych, czyli 1 i większych, rozdzielczość pomiaru odpowiada zwykle wartości 1/2 działki elementarnej.

Przykład. 1: Przyrząd wskazówkowy o zakresie $U_z = 10 \text{ V}$, $\alpha_{\max} = 100 \text{ dz}$ i dokładności odczytu $\Delta_o \alpha = 0,2 \text{ dz}$, ma rozdzielczość pomiaru

$$\Delta_r U = \frac{U_z}{\alpha_{\max}} \cdot \Delta_o \alpha = \frac{10 \text{ V}}{100 \text{ dz}} \cdot 0,2 \text{ dz} = 0,02 \text{ V}$$

Przykład 2: Odczyt z omomierza cyfrowego miał wartość: $R = 0,983 \Omega$. Dokonany został z rozdzielczością $1 \text{ m}\Omega$.

7. LICZBY PRZYBLIŻONE, CYFRY ZNACZĄCE LICZBY

Skutkiem ograniczonej dokładności przyrządów pomiarowych wynik pomiaru jest liczbą przybliżoną, mającą określoną dokładność. Wartości uzyskane bezpośrednio z odczytów lub na podstawie obliczeń są tzw. **wynikami surowymi**, czyli liczbami zwykle o zbyt dużej liczbie cyfr znaczących. Na liczbach tych należy przeprowadzić rachunek ich uproszczenia – inaczej mówiąc, należy je zaokrąglić.

O dokładności przybliżenia liczby świadczy liczba występujących w niej cyfr znaczących.

W zapisie dziesiętnym liczby, cyframi znaczącymi są jej wszystkie cyfry z pominięciem początkowych zer.

Przykład 3: Liczba 102,700 ma 6 cyfr znaczących

Przykład 4: Liczba 0,0123 ma 3 cyfry znaczące

Przykład 5: Liczba 1000,5 ma 5 cyfr znaczących

W praktyce może też wystąpić liczby (wartości) przybliżone, dla których nie można podać ścisłej liczby cyfr znaczących, czyli dokładności ich uproszczenia. Takimi są liczby całkowite z zerami na końcu, np. 3800, 9000, itp. Ich poszczególne zera mogą być cyframi znaczącymi lub nieznaczącymi.

Przykład 6: Liczba przybliżona 1000 może mieć 1, 2 lub 3 cyfry znaczące. Nie znając „historii” jej uproszczenia nie można tego jednoznacznie stwierdzić.

Chcąc wyeliminować tę niejednoznaczność należy taką liczbę przedstawić za pomocą zapisu potęgowego liczby 10 z wykładnikiem całkowitym (dodatnim lub ujemnym). Natomiast prawidłowy zapis wartości fizycznej, mającej jednostkę miary, powinien mieć odpowiednio dobraną wielokrotność lub podwielokrotność.

Przykład 7: Liczba 14000 przedstawiona 4 cyframi znaczącymi ma postać $1,400 \cdot 10^4$.

Przykład 8: Liczba 1000 w zapisie z 2 cyframi znaczącymi ma postać $1,0 \cdot 10^3$.

Przykład 9: Wartość 1500W z 3 cyframi znaczącymi ma postać 1,50kW.

Przykład.10: Wartość 120A w zapisie z 2 cyframi znaczącymi ma postać 0,12kA.

8. ZASADY UPRASZCZANIA LICZB - ZAOKRĄGLANIA

Zmniejszając liczbę cyfr znaczących w liczbie lub wartości uzyskuje się jej przybliżenie. O liczbie pominiętych cyfr znaczących decyduje pożądaną dokładność przybliżenia, która wynika z przyjętych kryteriów. Np. w zeznaniach podatkowych kwoty zaokrągla się do 1 złotego; w napiwkach uwzględnia się kwotę rachunku. Przy opracowaniu wyników pomiarów występują ścisłe reguły upraszczaniu liczb i wartości.

Reguła I

**Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest mniejsza niż 5,
to liczba zaokrąglona pozostaje bez zmian.**

Przykład 11: Liczbę 1263,5 uprościć do liczby z trzema cyframi znaczącymi.
Zapisie potęgowy $1,2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1,26 \cdot 10^3$.

Przykład 12: Liczbę jw. uprościć do liczby z jedną cyfrą znaczącą.
Jest $1,2635 \cdot 10^3$, będzie więc $1 \cdot 10^3$.

Przykład 13: Liczbę 0,750025 uprościć do liczby z 4 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 0,7500

Przykład 14: Liczbę 1,8205 uprościć do liczby z 2 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 1,8

Reguła II

**Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest większa niż 5,
to ostatnią cyfrę liczby uproszczonej zwiększamy o 1.**

Przykład 15: Liczbę 0,7635 zapisać z 1 cyfrą znaczącą.
Wynik zaokrąglenia: 0,8

Przykład 16: Liczbę 126,8 przedstawić z 2 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 130 ; prawidłowy jej zapis: $1,3 \cdot 10^2$

Przykład 17: Wartość $996,52\Omega$ przedstawić z 2 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: $1,0 \text{ k}\Omega$

Przykład 18: Wartość $1626,8\text{V}$ przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wartość zaokrąglona: $1,63 \text{ kV}$

Reguła III

**Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5,
a między kolejnymi cyframi znajdują się cyfry niezerowe,
to ostatnią cyfrę liczby zaokrąglonej zwiększa się o 1.**

Przykład 19: Wartość $12653,8 \mu\text{H}$ przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: $12,7 \text{ mH}$

Przykład 20: Wartość $0,78658\text{kA}$ przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 787 A

Przykład 21: Wartość $5,5200\text{nF}$ przedstawić z 1 cyfrą znaczącą.
Wynik zaokrąglenia: 6 nF .

Reguła IV

**Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr równa jest 5,
a wszystkie kolejne cyfry są zerami, to ostatnia cyfra liczby przybliżonej:**
- **pozostaje bez zmian, gdy jest parzysta,**
- **zostaje zwiększona o 1, gdy jest nieparzysta.**
(zwyczajowo mówi się o zaokrąglaniu „do parzystej”)

Przykład 22: Wartość 126500V przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.
Wynik zaokrąglenia: 126 kV

Przykład 23: Wartość 0,785500W przedstawić z 3 cyframi znaczącymi.

Wynik zaokrąglenia: 0,786 W

9. UWAGI DOTYCZĄCE OBLICZEŃ

Przeprowadzone na wynikach surowych obliczenia rachunkowe powinny być na tyle dokładne aby nie wpływały na końcowy wynik pomiaru. Stąd w każdej fazie obliczeń występuje problem właściwego przybliżania liczb, a więc ich przedstawiania z odpowiednią liczbą cyfr znaczących.

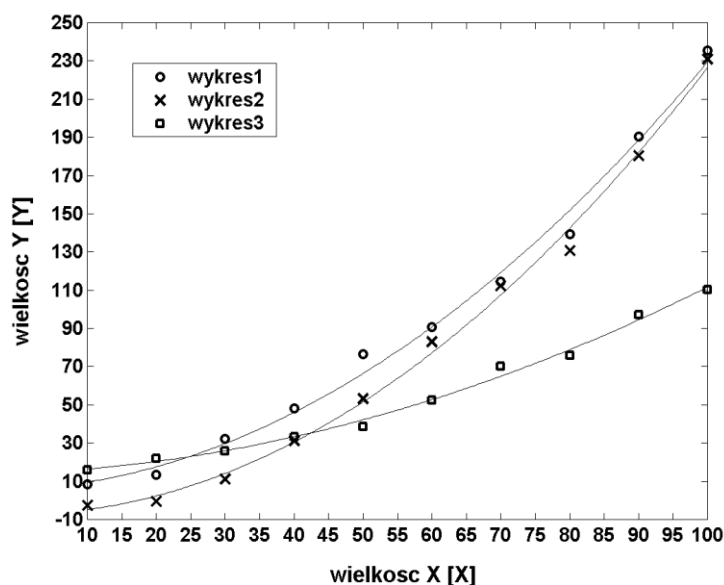
Do obliczeń wyników pośrednich należy stosować następujące reguły:

1. Obliczenia wartości mierzonej powinny być na tyle dokładne, aby końcowy wynik miał liczbę cyfr znaczących co najmniej równą dokonany odczytom.
2. Stosując w obliczeniach kalkulator zwykle uzyskuje się wyniki z bardzo dużą liczbą cyfr znaczących. Przepisywanie ich do tabel pomiarowych bez wstępnego zaokrąglenia nie ma uzasadnienia.

10. ZASADY TWORZENIA WYKRESÓW

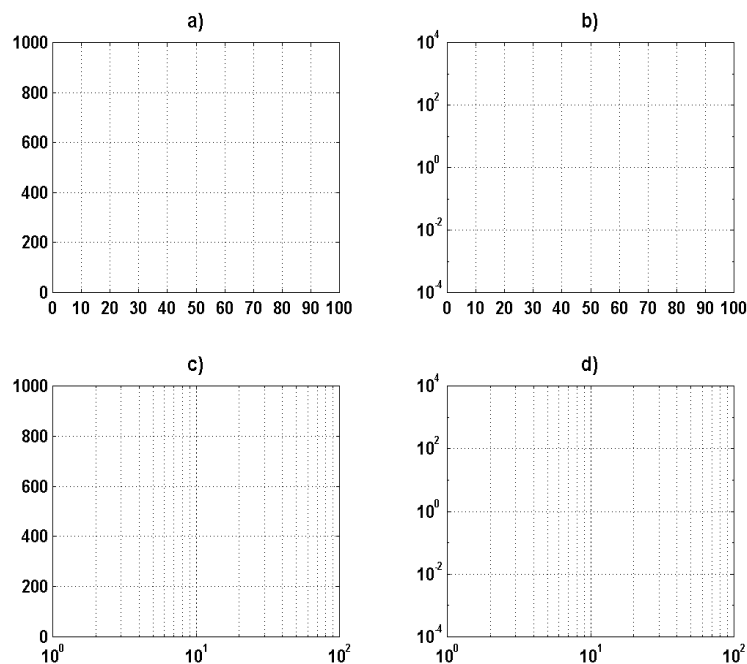
Wykresy sporządzanych zależności powinny być wykonane estetycznie, ręcznie przy pomocy krzywków lub w postaci wydruków na standardowych rozmiarach papierów. Wykresy wykonane ręcznie muszą być nanoszone na papier milimetrowy a wydruki komputerowe można robić na papierze gładkim.

Każdy wykres powinien być zaopatrzony w opis zależności funkcyjnej oraz informację w jakich warunkach był „zdejmowany”. Osie wykresów powinny być oznaczone, tzn. powinny zawierać informację jakie wielkość są na nich odłożone oraz w jakich jednostkach są wykreślone ich wartości. Jeżeli na danym wykresie naniesiono kilka krzywych to należy je wykreślić różnymi kolorami lub przy pomocy symboli np. •, o, x, *, itp. Wykres taki zawsze powinien być jednoznaczny – opis poszczególnych krzywych należy zawrzeć pod rysunkiem lub w legendzie – rys. 5.



Rys.5. Przykład wykresu

Ogólnie dostępny papier milimetrowy reprezentuje tzw. siatkę liniowo-liniową. Oprócz siatki liniowej, w celu uwypuklenia charakterystycznych zmian interesującej nas zależności, stosuje się jeszcze siatki logarytmiczne: liniowo-logarytmiczną, logarytmiczno-liniową i logarytmiczno-logarytmiczną – rys. 6.



Rys. 6. Rodzaje siatek:

a) liniowa; b) liniowo-logarytmiczna; c) logarytmiczno-liniowa; d) logarytmiczno-logarytmiczna.

Siatka liniowo-logarytmiczna znajduje zastosowanie gdy zakres liczbowy wartości osi rzędnych (oś y) jest znaczny, tzn. poszczególne wartości y_i różnią się między sobą o rzędy wielkości. Pozwala ona ponadto na sprawdzenie istnienia między dwiema wielkościami zależności typu

$$y = Ae^{ax}$$

gdzie A , a – stałe, gdyż linearyzuje jej wykres.

Podobnie, gdy wartości osi odciętych x charakteryzują się dużym zakresem zmian, wykorzystywana jest **siatka logarytmiczno-liniowa**. Dodatkowo pozwala na linearyzację zależności typu

$$y = A + alnx$$

gdzie A , a – stałe.

Siatkę logarytmiczno-logarytmiczną wykorzystuje się natomiast w sytuacji, gdy wartości na obu osiach charakteryzują się użymi zakresami zmian oraz do sprawdzania zależności typu $y = Ax^a$, gdzie A , a – stałe.

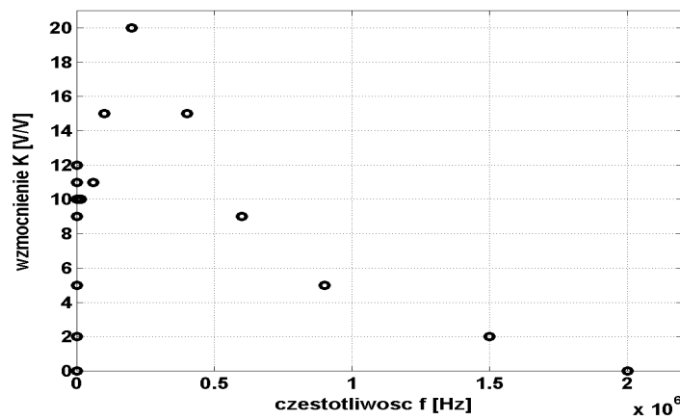
W przypadku braku dostępu do siatki logarytmicznej wykres można również wykonać na zwykłym papierze milimetrowym stosując odpowiednie skalowanie.

Przykład.

W tabeli 1 w wierszach 1-3 przedstawiono wyniki pomiaru przebiegu wzmocnienia pewnego wzmacniacza w funkcji częstotliwości. Wykres sporządzony na podstawie wartości zawartych w tabeli 1 i przedstawiony na rys. 7 w skali liniowej jest całkowicie nieczytelny dla małych częstotliwości.

Tabela 1. Wyniki pomiarów wzmocnienia K pewnego wzmacniacza w funkcji częstotliwości f

Lp.	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f	Hz	1	1.5	2	4	8	12	20	40	500	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
K	V/V	0	2	5	9	11	12	11	10	10	10	10	11	15	20	15	9	5	2	0
f'	cm	0	0,5	0,9	1,8	2,7	3,2	3,9	4,8	8,1	9,5	12,5	14,3	15,0	15,9	16,8	17,3	17,9	18,5	18,9



Rys. 7. Przykład źle dobranej skali dla osi częstotliwości

Warto zastanowić się chwilę nad wartościami f . Obejmują one zakres od 1 Hz do 2 MHz czyli ponad 6 dekad. Dekadę tworzy przedział, którego górna granica jest 10 razy większa od dolnej.

Pierwsza dekada obejmuje więc zakres (0, 10) Hz,

druga (10, 100) Hz,

trzecia (100, 1000) Hz itd.

Długości tych przedziałów w skali liniowej rosną. Zastosowanie skali logarytmicznej (np. logarytmu przy podstawie 10 z wartości częstotliwości) sprawia, że na rysunku będą one miały tę samą długość. Przypuśćmy, że na wykonanie osi dla f mamy do dyspozycji 21 cm. Rezerwując na każdą dekadę w skali logarytmicznej po 3 cm uzyskamy długość odcinka odpowiadającego wszystkim 6 dekadom równą:

$$6 \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

Poszczególnym granicom przedziałów będą więc odpowiadały następujące wartości w centymetrach:

$$10^0 \text{ Hz} \rightarrow 0 \text{ cm}$$

$$10^1 \text{ Hz} \rightarrow 3 \text{ cm}$$

$$10^2 \text{ Hz} \rightarrow 6 \text{ cm}$$

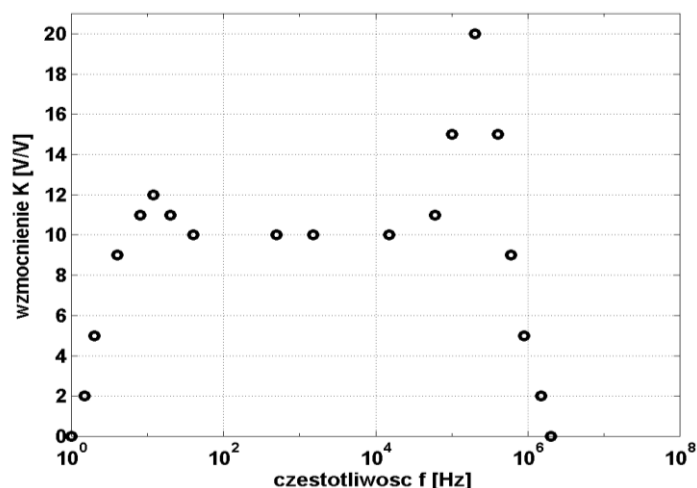
$$10^3 \text{ Hz} \rightarrow 9 \text{ cm}$$

itd.

Zależność przeskalowująca jest oczywista: wartościom częstotliwości wyrażonym w hercach należy przypisać następujące odległości na osi wyrażone w centymetrach:

$$f'[\text{cm}] = \log_{10}\{f[\text{Hz}]\} \cdot 3 [\text{cm}].$$

Wiersz 4 tabeli 1 zawiera obliczone wartości f' [cm] a odpowiedni wykres w uzyskanej skali logarytmiczno-liniowej przedstawia rys. 8. Można na nim zaobserwować pasmowy charakter wzmocnienia wzmacniacza z dwoma podbiciami w zakresie niskich i wysokich częstotliwości.



Rys. 8. Przykład dobrze dobranej skali dla osi częstotliwości.

W celu wykorzystania pełnej powierzchni rysunku niejednokrotnie konieczne jest przesuwanie początku układu współrzędnych.

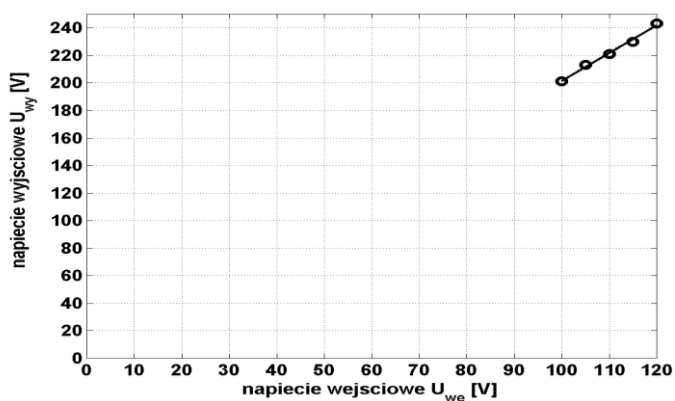
Przykład.

W tabeli 2 w wierszach 1-3 przedstawiono przykładowe wyniki pomiarów napięcia wejściowego i wyjściowego pewnego układu.

Tabela 2. Przykładowa charakterystyka przetwarzania

Lp.	-	1	2	3	4	5
U_{we}	mV	100	105	110	115	120
U_{wy}	mV	201	213	221	230	243
U'_{we}	cm	0	4	8	12	16
U'_{wy}	cm	0,5	6,5	10,5	15,0	21,5

Podobnie jak poprzednio, wykres sporządzony na ich podstawie – rysunek 9 – jest nieczytelny i wymaga przesunięcia początku układu współrzędnych.



Rys. 9. Przykład złego rozplanowania powierzchni rysunku.

Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji 18 cm dla osi x i 25 cm dla osi y. Należy zastosować takie zależności przeskalowujące, aby po pierwsze – wielokrotność działki podstawowej papieru milimetrowego np. 1 cm, 2 cm, 3 cm itd. odpowiadała 1, 2, 5, 10, 20, 50 itd. jednostkom mierzonej wielkości (należy to zapewnić zawsze, niezależnie od konieczności przesuwania początku układu współrzędnych) i po drugie – aby w pełni wykorzystać powierzchnię wykresu. Rozważmy oś x. Chcemy, aby długości ok. 18 cm odpowiadał przedział o szerokości

$$120 \text{ mV} - 100 \text{ mV} = 20 \text{ mV}.$$

Przy skalach bazujących na jednostce papieru milimetrowego np. 1 cm/ 1mV i 1 cm/ 2mV uzyskujemy wartości:

$$20 \text{ mV} \cdot (1 \text{ cm/ } 1\text{mV}) = 20 \text{ cm}$$

$$\text{oraz } 20 \text{ mV} \cdot (1 \text{ cm/ } 2 \text{ mV}) = 10 \text{ cm},$$

odpowiadające kolejno – przekroczeniu i znacznemu niewypełnieniu dostępnego zakresu 18 cm. Przy zastosowaniu skali $S_x = 4 \text{ cm/ } 5 \text{ mV}$ bazującej na wielokrotności działki podstawowej papieru milimetrowego uzyskujemy wartość

$$20 \text{ mV} \cdot (4 \text{ cm/ } 5 \text{ mV}) = 16 \text{ cm},$$

co już można uważać za rozsądne wypełnienie dostępnego zakresu. Zależność przeskalowująca będzie więc miała postać:

$$U'_{we}[\text{cm}] = (U_{we} - U_{wemin}) \cdot S_x = (U_{we} - 100 \text{ mV}) \cdot (4 \text{ cm/ } 5 \text{ mV}).$$

Podobnie postępując można dla osi y wyprowadzić zależność:

$$U'_{wy}[\text{cm}] = (U_{wy} - U_{wymmin}) \cdot S_y,$$

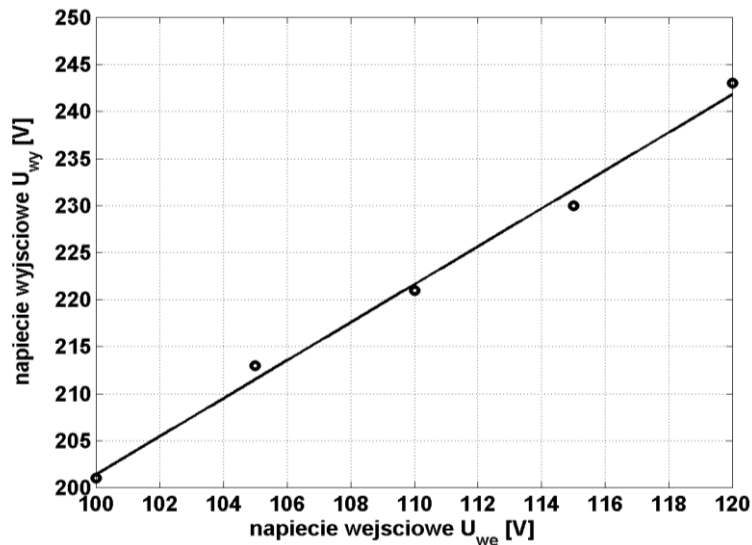
W której S_y najwygodniej wyznaczyć tak, aby zakresowi 25 cm odpowiadał przedział (200, 250) mV, czyli przedział o szerokości 50 mV:

$$S_y = 1 \text{ cm/ } 2 \text{ mV},$$

gdyż $50 \text{ mV} \cdot S_y = 25 \text{ cm}$. Ostatecznie więc:

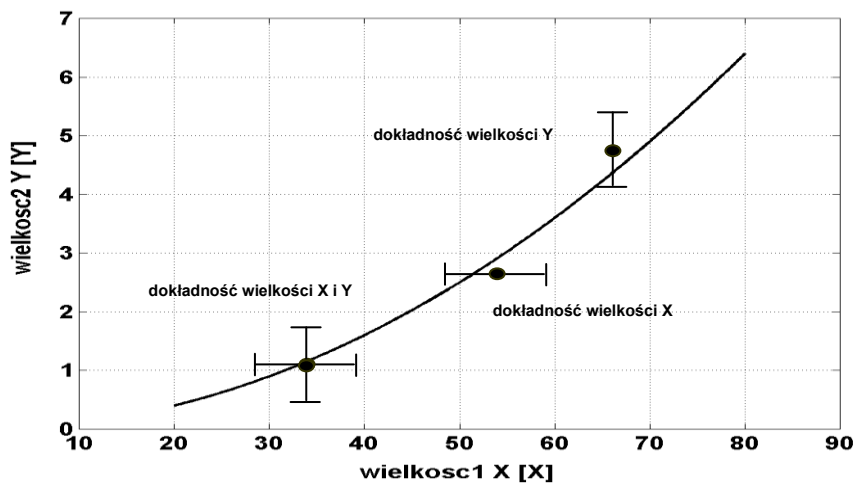
$$U'_{wy}[cm] = (U_{wy} - 200 \text{ mV}) \cdot (1 \text{ cm} / 2 \text{ mV}).$$

Wyznaczone wartości $U'_{we}[cm]$ i $U'_{wy}[cm]$ zawiera w wierszach 4-5 tabela 2, a sporządzony na ich podstawie wykres przedstawia rys. 10.



Rys. 10. Przykład dobrego rozplanowania powierzchni rysunku.

Niekiedy należy na wykresie zaznaczyć stopień dokładności realizowanych pomiarów. Używa się wówczas oznaczeń przedstawionych na rys. 11.



Rys. 11. Przykłady oznaczania na wykresach dokładności pomiarów.

W większości przypadków należy również jako zasadę przyjąć fakt, iż poszczególnych punktów wykresu nie należy łączyć krzywą łamaną. Można tak postąpić jedynie wówczas, gdy przedstawiane zależności mają znaczenie jedynie formalne. W przypadku wielkości fizycznych należy dokonać przybliżenia dyskretnych wyników pomiarów wykonując tzw. **aproksymację**.

Zadaniem aproksymacji zależności między dwiema wielkościami X i Y jest szacowanie jej przebiegu na podstawie przeprowadzonych pomiarów. Można tego dokonać w sposób graficzny za pomocą krzywych i linijki, prowadząc krzywą aproksymującą tak, aby przechodziła ona przez jak największą liczbę punktów określonych empirycznie lub blisko nich. Rozłożenie punktów względem krzywej powinno być, według oceny "na oko", symetryczne z zachowaniem, w miarę możliwości, jednakowej liczby punktów po jej obu stronach.

Znacznie dokładniejszą metodą aproksymacji jest metoda analityczna zwana **metodą naj-mniejszych kwadratów** lub metodą regresji. W najbardziej elementarnym ujęciu jako funkcję aproksymującą przyjmuje się wielomian n -tego rzędu:

$$Y = f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

którego współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_n$ wyznacza się na podstawie wyników pomiarów. Stopień wielomianu przyjmowany jest z reguły na podstawie pewnej wiedzy *a priori* o badanej zależności, tzn. należy założyć, że jest ona liniowa ($n = 1$), kwadratowa ($n = 2$), sześcienna ($n = 3$) itd.

Przy braku tej wiedzy rząd wielomianu można dobierać eksperymentalnie, pamiętając jednak, że jego wzrost prowadzi, co prawda, do zmniejszenia błędu dopasowania krzywej aproksymującej do punktów empirycznych, ale kosztem pojawienia się między nimi niepożądanych oscylacji.

Zasada wyznaczania funkcji aproksymującej jest następująca.

Przypuśćmy, że chodzi o wyznaczenie często występującej w praktyce zależności liniowej dla N punktów pomiarowych. Poszukujemy a_0 i a_1 w formule:

$$Y = a_0 + a_1X$$

Przy zakładanej liniowości danemu punktowi pomiarowemu x_i powinna odpowiadać wartość $y'_i = a_0 + a_1x_i$. Z pomiarów znamy jednak „błędne” y_i , więc różnica $\Delta_i = y_i - (a_0 + a_1x_i)$ jest błędem i -tego wyniku y_i . Tworząc sumę kwadratów wszystkich błędów:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2$$

możemy znaleźć takie a_0 i a_1 , dla których powyższa suma osiąga minimum (stąd uzasadnienie nazwy – metoda najmniejszych kwadratów). Badanie minimum jest zadaniem trywialnym i polega na wyznaczeniu pochodnych względem a_0 i a_1 i przyrównaniu ich do zera. Z układu dwu równań wyznacza się wówczas wartości a_0 i a_1 :

$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum y_i}{N} - a_1 \frac{\sum x_i}{N},$$

w których operacje sumowania odbywają się względem indeksu i . Otrzymane wartości dają najlepsze przybliżenie współczynników poszukiwanej prostej oparte na wynikach pomiarów w sensie średniokwadratowym. Organizacja powyższych obliczeń powinna być w sprawozdaniu zobrazowana tabelą zestawiającą kolejno wartości $x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2$ potrzebne do końcowych wzorów.

Przedstawioną metodę łatwo uogólnić na przypadek wielomianu dowolnego stopnia lub dowolnej funkcji $y = f(x)$ zależnej od nieznanymi parametrów $a_0, a_1, \dots$, jednakże powstałe równania liniowe mogą być wtedy trudne lub wręcz niemożliwe do rozwiązania.

Zagadnienia aproksymacji nie należy mylić z inną metodą znajdowania zależności funkcyjnej między danymi uzyskanymi z pomiaru, zwaną **interpolacją**. Polega ona na wyznaczeniu krzywej, która jest dopasowana z zerowym błędem do wyników pomiarów (przechodzi przez wszystkie punkty empiryczne). W zagadnieniach interpolacji wykorzystuje się m. in. metody funkcji sklepanych (ang. *splines*).