

ĆWICZENIE 1

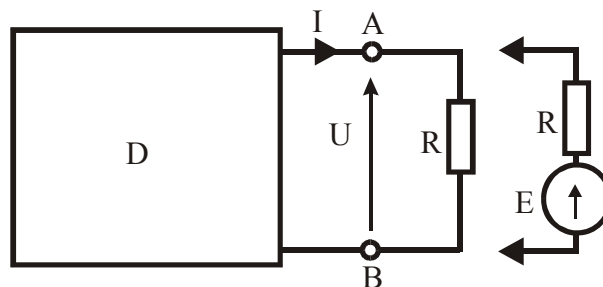
DWÓJNIK ŹRÓDŁOWY PRĄDU STAŁEGO

Cel ćwiczenia: sprawdzenie zasady równoważności dla dwójnika źródłowego (twierdzenie Thevenina, twierdzenie Nortona), sprawdzenie warunku dopasowania odbiornika do źródła.

1.1. Podstawy teoretyczne ćwiczenia

1.1.1. Określenie dwójnika

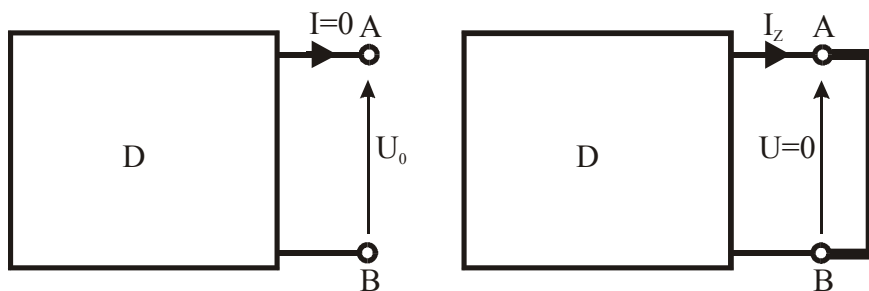
Dwójnik jest to dowolnie złożony układ elektryczny o wyróżnionych i wyprowadzonych na zewnątrz dwu zaciskach. Jego stan elektryczny albo stan pracy określają wartości napięcia U między wyróżnionymi końcówkami i natężenia prądu I w obwodzie zewnętrznym. Wartości te zależą od parametrów obwodu zewnętrznego, stanowiącego obciążenie dwójnika (rys.1.1.).



Rys.1.1. Dwójnik z dołączonym obciążeniem

Granicznymi stanami pracy dwójnika są:

- stan jałowy**, gdy do końcówek dwójnika nie jest dołączone żadne obciążenie. W tym przypadku natężenie prądu I w obwodzie zewnętrznym jest równe zero. Natomiast napięcie między końcówkami dwójnika U_0 nazywane jest napięciem stanu jałowego dwójnika (rys. 1.2.a.).
- stan zwarcia**, gdy końcówki dwójnika są połączone bezrezystancyjnym przewodem. W tym przypadku napięcie U między końcówkami dwójnika jest równe zero. Natomiast prąd płynący między końcówkami dwójnika I_z nazywane jest prądem zwarcia dwójnika (rys. 1.2.b.).



Rys. 1.2. Stan jałowy i stan zwarcia dwójnika

Jeżeli:

1. Napięcie dwójnika w stanie jałowym jest różne od zera ($U_o \neq 0$),
2. Natężenie prądu dwójnika w stanie zwarcia jest różne od zera ($I_z \neq 0$),

to taki dwójnik jest określany jako **dwójnik źródłowy**.

Napięcie w stanie jałowym i natężenie prądu w stanie zwarcia całkowicie charakteryzują dwójnik źródłowy. Wielkości te nazywają się **parametrami zewnętrznymi dwójnika**. Parametry zewnętrzne można zmierzyć lub wyznaczyć analitycznie. Do wyznaczenia parametrów zewnętrznych na drodze analitycznej trzeba znać schemat obwodu stanowiącego dwójnik.

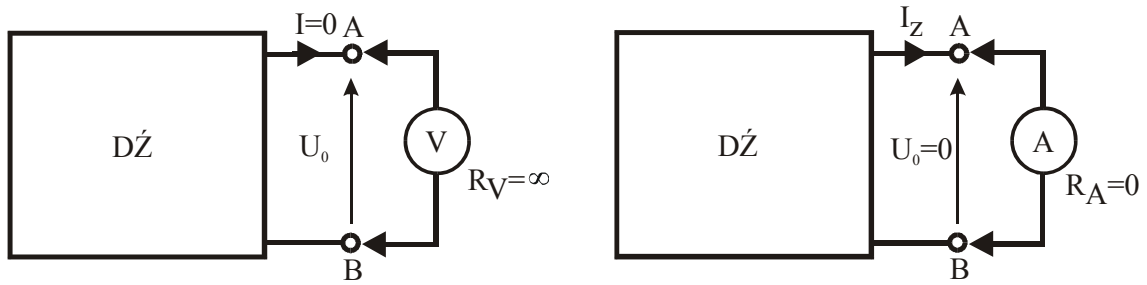
Dwójnik bezźródłowy jednoznacznie charakteryzuje jeden parametr – rezystancja.

1.1.2. Twierdzenie Thevenina

Twierdzenie Thevenina (jak i twierdzenie Nortona, omówione w punkcie następnym), wynika z zasady równoważności, która mówi, że dwa układy n zaciskowe są sobie równoważne, gdy ich zamiana nie powoduje zmiany wielkości zaciskowych (U_k , I_k) związanych z ich końcówkami.

Niech będzie dany liniowy dwójnik źródłowy z zaciskami A-B. Na zaciskach A-B wykonuje się dwa pomiary:

- idealnym woltomierzem (o rezystancji wewnętrznej równej ∞) pomiar napięcia U_o w stanie jałowym (rys. 1.3.a.),
- idealnym amperomierzem (o rezystancji wewnętrznej równej zero) pomiar prądu I_z w stanie zwarcia (rys. 1.3.b.).

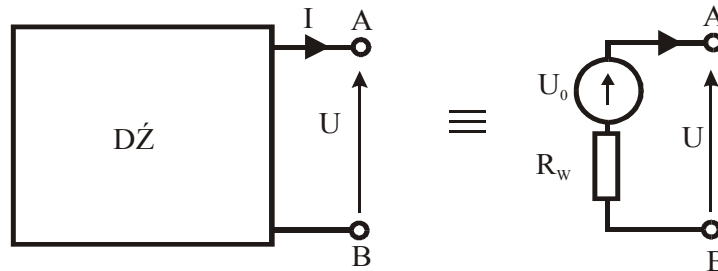


Rys 1.3. Pomiar parametrów zewnętrznego dwójnika

Twierdzenia Thevenina:

Każdy liniowy dwójnik źródłowy DŻ o napięciu źródłowym U_o i prądzie zwarcia I_z , od strony swych zacisków jest równoważny układowi zastępczemu złożonemu z szeregowego połączenia źródła napięcia U_o

i rezystancji R_w określonej zależnością $R_w = \frac{U_o}{I_z}$.



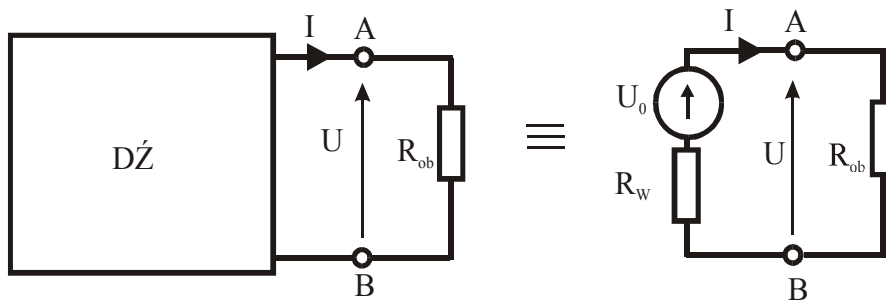
Rys.1.4. Ilustracja twierdzenia Thevenina

Twierdzenie Thevenina nosi również nazwę twierdzenia o zastępczym generatorze (źródle) napięcia.

Wnioski wynikające z twierdzenia Thevenina:

1. Jeżeli do zacisków danego liniowego dwójnika źródłowego (rys. 1.5), między którymi występuje napięcie stanu jałowego U_o , dołączyć gałąź bezźródłową o rezystancji R_{ob} , to prąd w tej gałęzi jest określony zależnością (1.1).

$$I = \frac{U_o}{R_w + R_{ob}} \tag{1.1}$$

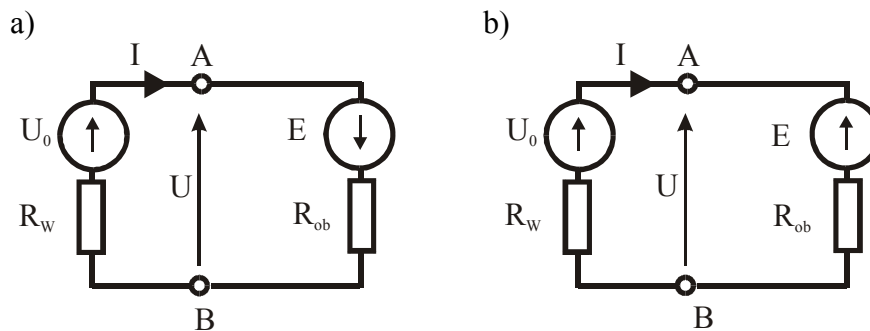


Rys. 1.5. Dwójnik źródłowy obciążony rezystancją R_{ob}

2. Jeżeli do zacisków danego liniowego dwójnika źródłowego (rys. 1.6.), między którymi występuje napięcie stanu jałowego U_o , dołączyć gałąź składającą się z szeregowego połączenia źródła napięciowego o wartości E i rezystancji R_{ob} , to prąd w tej gałęzi jest określony ilorazem algebraicznej sumy napięć U_o oraz E , przez sumę rezystancji R_w i R_{ob} .

$$I = \frac{U_o \pm E}{R_w + R_{ob}} \quad (1.2)$$

gdzie znak $+$ w liczniku dla układu z rysunku 1.6.a., a znak minus dla układu z rysunku 1.6.b.



Rys. 1.6. Dwójnik źródłowy obciążony gałęzią źródłową

1.1.3. Twierdzenie Nortona

Przekształcając równanie (1.1) do postaci:

$$U_o = IR_{ob} + IR_w \quad (1.3)$$

i dzieląc stronami przez R_w , otrzymujemy:

$$\frac{U_o}{R_w} = \frac{IR_{ob}}{R_w} + I \quad (1.4)$$

Ponieważ $\frac{U_o}{R_w} = I_z$ jest prądem zwarcia dwójnika źródłowego, to wprowadzając oznaczenie $\frac{IR_{ob}}{R_w} = \frac{U}{R_w} = I_w$, równanie (1.9) można zapisać w postaci:

$$I_z = I_w + I \quad (1.5)$$

gdzie: I_w – prąd w rezystancji R_w (konduktancję $G_w = \frac{1}{R_w}$) na zaciskach której

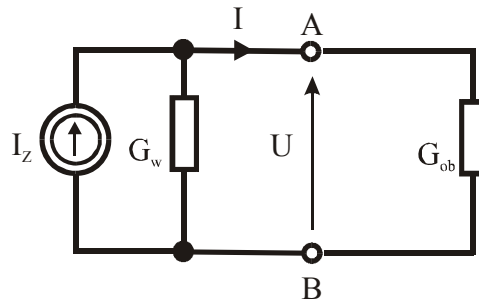
występuje napięcie U ,

I – prąd w rezystancji obciążenia R_{ob} (konduktancję $G_{ob} = \frac{1}{R_{ob}}$) na zaciskach

której występuje napięcie U ,

Równanie (1.5) opisuje układ równoległego połączenia źródła prądowego I_z i dwóch rezystancji R_w i R_{ob} (konduktancji G_w i G_{ob}) jak pokazano na rys. 1.7.

Układ ten jest równoważny układowi z rys. 1.5., dlatego twierdzenie Nortona można sformułować w sposób następujący:



Rys. 1.7. Układ równoległego połączenia źródła prądowego I_z i dwóch konduktancji G_w i G_{ob} (rezystancji R_w i R_{ob})

Twierdzenie Nortona:

Każdy liniowy dwójnik źródłowy DŹ o napięciu źródłowym U_o i prądzie zwarcia I_z , od strony swych zacisków jest równoważny układowi zastępczemu złożonemu z równoległego połączenia źródła prądowego I_z

i konduktancji G_w określonej zależnością $G_w = \frac{I_z}{U_o}$.

Twierdzenie Nortona nosi również nazwę twierdzenia o zastępczym generatorze (źródle) prądu.

Wnioski:

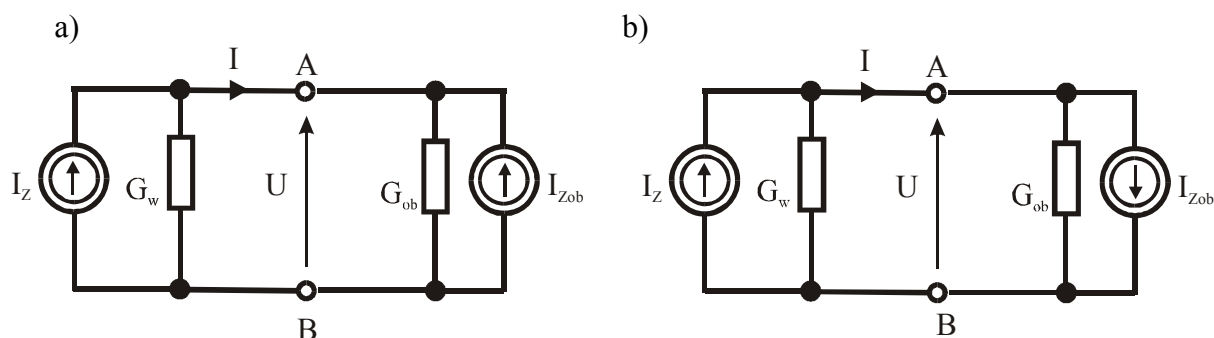
1. Jeżeli do zacisków danego liniowego dwójnika źródłowego, o prądzie zwarcia I_z , dołączyć gałąź bezźródłową o konduktancji G_{ob} , to napięcie na tej gałęzi jest określone ilorazem prądu I_z przez sumę konduktancji G_w i G_{ob} .

$$U = \frac{I_z}{G_w + G_{ob}} \quad (1.6)$$

2. Jeżeli do zacisków danego liniowego dwójnika źródłowego (rys. 1.8), o prądzie zwarcia I_z , dołączyć gałąź złożoną z równoległego połączenia źródła prądu o wartości I_{z1} i konduktancji G_{ob} , to napięcie na tej gałęzi jest określone ilorazem algebraicznej sumy prądów I_z oraz I_{z1} , przez sumę konduktancji G_w i G_{ob} .

$$U = \frac{I_z \pm I_{z1}}{G_w + G_{ob}} \quad (1.7)$$

gdzie znak + w liczniku dla układu z rysunku 1.8.a., a znak minus dla układu z rysunku 1.8.b.



Rys. 1.8. Dwójnik źródłowy obciążony gałęzią źródłową

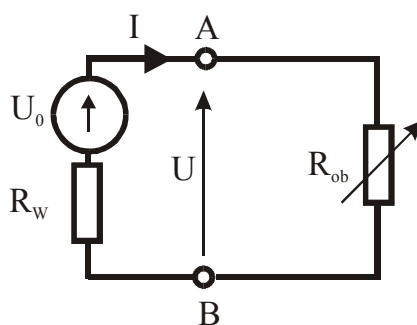
1.1.4. Warunek dopasowania

W układach elektrycznych, w procesie przekazywania mocy, zachodzi często potrzeba maksymalizacji mocy pobieranej przez odbiornik dołączony do dwójnika źródłowego.

Przez problem dopasowania energetycznego odbiornika do dwójnika źródłowego rozumiemy taki dobór parametrów odbiornika (przy ustalonych parametrach dwójnika źródłowego), dla których moc użyteczna odbiornika osiąga maksimum.

Dla obwodu z rys. 1.9, przy powyższym założeniu i zmianie rezystancji obciążenia od zera do nieskończoności, moc użyteczną $P_{uż}$ określa zależność:

$$P_{uż} = G_{ob} U^2 = R_{ob} I^2 = U_o^2 \frac{R_{ob}}{(R_w + R_{ob})^2} \quad (1.8)$$



Rys. 1.9. Dwójnik źródłowy obciążony regulowaną rezystancją R_{ob} .

Problem sprowadza się do znalezienia takiej wartości zmiennej rezystancji obciążenia, przy której funkcja ($P_{uż} = f(R_{ob})$ - zależność (1.8)) osiąga ekstremum. Ponieważ:

$$P_{uż} \geq 0 \quad \text{oraz} \quad P_{uż} = 0 \quad \text{przy} \quad R_{ob} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{R_{ob} \rightarrow \infty} P_{uż} = 0$$

funkcja $P_{uż} = f(R_{ob})$ posiada co najmniej jedno maksimum.

W celu wyznaczenia warunków w których moc odbiornika jest największa, obliczana jest pochodna funkcji $P_{uż} = f(R_{ob})$.

$$\frac{dP_{u\dot{z}}}{dR_{ob}} = U_o^2 \frac{(R_w + R_{ob})^2 - 2R_{ob}(R_w + R_{ob})}{(R_w + R_{ob})^4} = U_o^2 \frac{R_w^2 - R_{ob}^2}{(R_w + R_{ob})^4}, \quad (1.9)$$

Następnie wyznacza się wartość rezystancji odbiornika, przy której obliczona pochodna przyjmuje wartość zerową. Stąd:

$$R_{ob} = R_w \quad (1.10)$$

i jest to jedyne rozwiązanie dla $R_{ob} > 0$.

Warunek (1.10) nazywany jest dopasowaniem odbiornika do źródła (dwójnika źródłowego). Wartość maksymalnej mocy użytecznej w warunkach dopasowania wynosi więc (po podstawieniu (1.10) do (1.8)):

$$P_{u\dot{z} \max} = \frac{U_o^2}{4R_w}. \quad (1.11)$$

Oprócz mocy użytecznej odbiornika w układzie źródło – odbiornik, występuje również moc strat wewnątrz źródła P_w (na rezystancji wewnętrznej).

$$P_w = R_w I^2 = U_o^2 \frac{R_w}{(R_w + R_{ob})^2} \quad (1.12)$$

Zgodnie z zasadą Tellegena, całkowita moc źródła napięcia wynosi:

$$P_c = P_w + P_{u\dot{z}} = \frac{U_o^2}{(R_w + R_{ob})^2} R_w + \frac{U_o^2}{(R_w + R_{ob})^2} R_{ob} = \frac{U_o^2}{(R_w + R_{ob})^2} (R_w + R_{ob}) = \frac{U_o^2}{(R_w + R_{ob})} \quad (1.13)$$

Stosunek mocy użytecznej do mocy całkowitej źródła nosi nazwę sprawności η .

- dla schematu napięciowego dwójnika:

$$\eta = \frac{P_{u\dot{z}}}{P_c} = \frac{R_{ob}}{R_w + R_{ob}} \quad (1.14)$$

- dla schematu prądowego dwójnika:

$$\eta = \frac{P_{u\dot{z}}}{P_c} = \frac{G_{ob}}{G_w + G_{ob}} \quad (1.15)$$

W warunkach dopasowania, sprawność przyjmuje wartość:

$$\eta|_{R_{ob}=R_w} = 0,5 \quad (1.16)$$

a moc całkowita źródła:

$$P_c|_{R_{ob}=R_w} = \frac{U_o^2}{2R_w} = \frac{I_z^2}{2G_w}. \quad (1.17)$$

1.2. Badania laboratoryjne

LABORATORIUM ELEKTROTECHNIKI I ELEKTRONIKI					
Grupa		Podgrupa		Numer ćwiczenia	
Lp.	Nazwisko i imię		Ocena	Data wykonania ćwiczenia	
1.					
2.				Podpis prowadzącego zajęcia	
3.					
4.					
5.					
Temat					

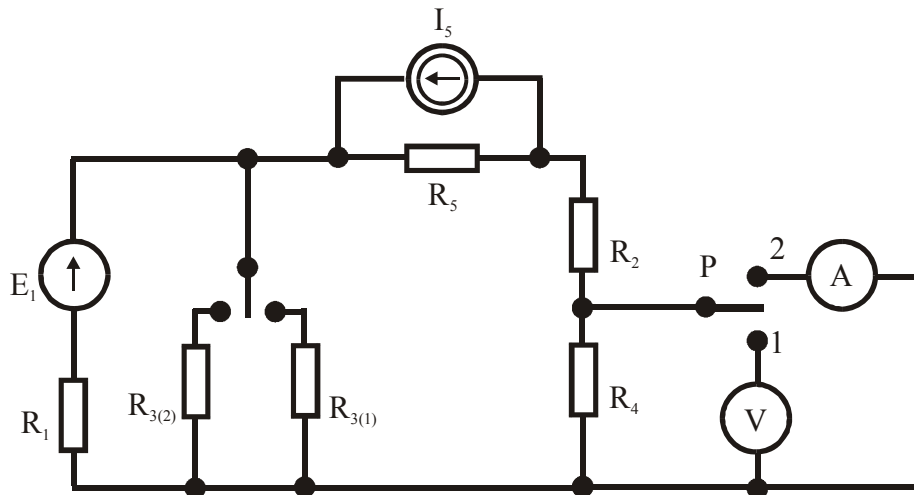
1.2.1. Wykaz przyrządów

Tabela 1.0.

Oznaczenia	Nazwa i typ elementu	Dane	Nr fabr.	Uwagi
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>

1.2.1. Pomiar parametrów dwójnika źródłowego

W układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 1.10, wykonać pomiary napięcia U_o (przełącznik P w położeniu 1) i prądu I_z (przełącznik P w położeniu 2), dla dwóch wartości rezystancji R_3 . Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 1.1.



Rys. 1.10. Układ do pomiaru parametrów zewnętrznych badanego dwójnika (przełącznik P w położeniu 1 – pomiar U_o , przełącznik w położeniu 2 – pomiar I_z)

Tab. 1.1

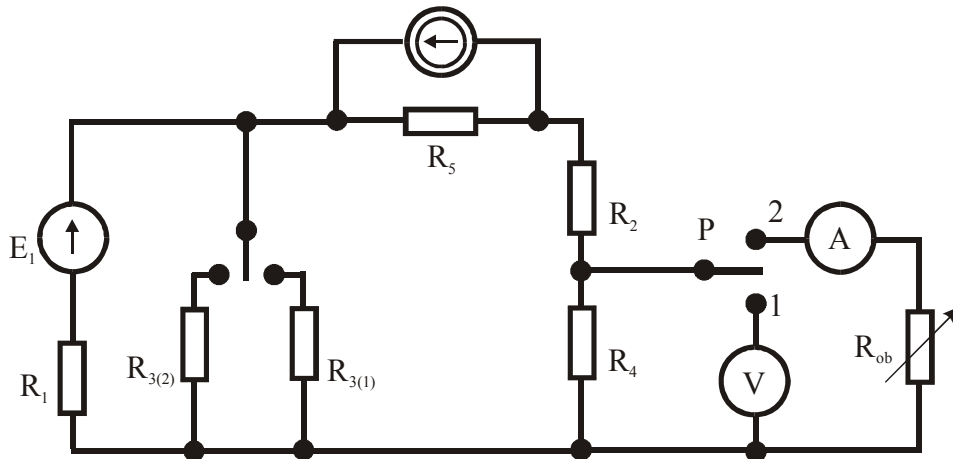
$E_1 = \dots\dots\dots$ [V]; $I_5 = \dots\dots\dots$ [A]; $R_1 = \dots\dots\dots$ [Ω]; $R_2 = \dots\dots\dots$ [Ω]; $R_{3(1)} = \dots\dots\dots$ [Ω]; $R_{3(2)} = \dots\dots\dots$ [Ω]; $R_4 = \dots\dots\dots$ [Ω]; $R_5 = \dots\dots\dots$ [Ω];									
Pomiary				Obliczenia					
Lp	R_3	U_o	I_z	R_w (z pom.)	G_w (z pom.)	U_o (z oblicz.)	I_z (z oblicz.)	R_w (z oblicz.)	G_w (z oblicz.)
	Ω	V	A	Ω	S	V	A	Ω	S
1.									
2.									
...									

Opracowanie wyników pomiarów:

- na podstawie wykonanych pomiarów obliczyć R_w i G_w , wyniki wpisać do tabeli 1.1.
- na podstawie danych wartości elementów tworzących badany dwójnik źródłowy z rys. 1.10, obliczyć parametry równoważnego dwójnika źródłowego (napięciowego i prądowego), wyniki obliczeń wpisać do tabeli 1.1.

1.2.2. Pomiar prądu w odbiorniku

W układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 1.11 dokonać pomiaru prądu w odbiorniku (R_{ob}) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej. Pomiaru dokonać dla dwóch wartości rezystancji R_3 . Wyniki pomiarów prądu wpisać do tabeli 1.2 i tabeli 1.3.



Rys. 1.11. Układ do pomiaru prądu płynącego przez odbiornik (przełącznik P w położeniu 2) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej

Tab. 1.2

$E_1 = \dots\dots\dots$ V; $I_5 = \dots\dots\dots$ A; $R_1 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_2 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_{3(1)} = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_4 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_5 = \dots\dots\dots$ Ω ;					
Pomiary			Obliczenia		
Lp.	R_{ob} Ω	$I_{(1)}$ A	G_{ob} S	$U_{(1)}$ V	$P_{uż(1)}$ W
1					
2					
...					

Tab. 1.3

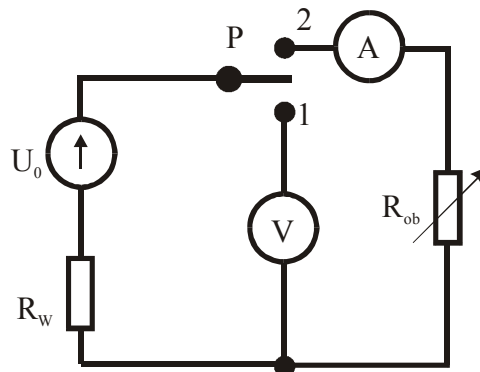
$E_1 = \dots\dots\dots$ V; $I_5 = \dots\dots\dots$ A; $R_1 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_2 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_{3(2)} = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_4 = \dots\dots\dots$ Ω ; $R_5 = \dots\dots\dots$ Ω ;					
Pomiary			Obliczenia		
Lp.	R_{ob} Ω	$I_{(2)}$ A	G_{ob} S	$U_{(2)}$ V	$P_{uż(2)}$ W
1					
2					
...					

Opracowanie wyników pomiarów:

- na podstawie pomiaru prądu obliczyć napięcie $U_{(1)}$ i $U_{(2)}$ na rezystancji odbiornika R_{ob} i moc użyteczną $P_{uż}$ odbiornika, wyniki obliczonych wartości napięcia i mocy użytecznej wpisać do tabeli 1.2 i tabeli 1.3.
- w oparciu o wyniki pomiarów i obliczeń zamieszczonych w tabelach 1.2 i 1.3 (dla dwóch wartości rezystancji R_3) wykonać wykresy następujących zależności:
 - $I = f(R_{ob}), U = f(R_{ob}), P_{uż} = f(R_{ob}),$
 - $U = f(I)$

1.2.3. Pomiar prądu płynącego w odbiorniku dla dwójnika równoważnego o schemacie napięciowym (dwójnik Thevenina)

W układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 1.12 dokonać pomiaru prądu w odbiorniku (R_{ob}) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej. Pomiaru dokonać dla dwóch dwójników równoważnych (odpowiadających wartościom rezystancji R_3). Wyniki pomiarów prądu wpisać do tabel 1.4 i 1.5.



Rys. 1.12. Układ do pomiaru prądu w odbiorniku (przełącznik P w położeniu 2) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej

Tab. 1.4

U ₀₁ = V; R _{w(1)} = Ω;								
Pomiary			Obliczenia					
Lp.	R_{ob}	I₍₁₎	G_{ob}	U₍₁₎	P_{c(1)}	P_{w(1)}	P_{uż(1)}	η₍₁₎
	Ω	A	S	V	W	W	W	-
1								
2								
...								

Tab. 1.5

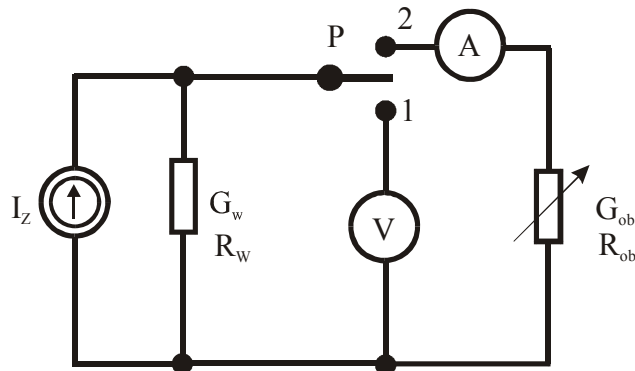
U ₀₂ = V; R _{w(2)} = Ω;								
Pomiary			Obliczenia					
Lp.	R _{ob}	I ₍₂₎	G _{ob}	U ₍₂₎	P _{c(2)}	P _{w(2)}	P _{uż(2)}	η ₍₂₎
	Ω	A	S	V	W	W	W	-
1								
2								
...								

Opracowanie wyników pomiarów:

- na podstawie pomiaru prądu obliczyć napięcie na rezystancji odbiornika R_{ob} , moc użyteczną $P_{uż}$ odbiornika, moc na rezystancji wewnętrznej P_w , moc całkowitą P_c i sprawność η układu; wyniki obliczonych wartości napięcia i mocy użytecznej wpisać do tabel 1.4 oraz 1.5., ponadto wykonać wykresy:
 - $I = f(R_{ob}), U = f(R_{ob}), P_{uż} = f(R_{ob}),$
 - $U = f(I)$
- porównać otrzymane wykresy z uzyskanymi w pkt. 1.2.2, opracować wnioski.
- w oparciu o wyniki pomiarów i obliczeń zamieszczonych w tabelach 1.4 i 1.5 wykonać wykresy następujących zależności:
 - $P_c = f(R_{ob}), P_w = f(R_{ob})$
 - $\eta = f(R_{ob})$

1.2.4. Pomiar prądu w odbiorniku dla dwójnika równoważnego o schemacie prądowym (dwójnik Nortona)

W układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 1.13. dokonać pomiaru prądu w odbiorniku (R_{ob}) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej. Pomiaru dokonać dla dwóch dwójników równoważnych (odpowiadających wartościom rezystancji R_3). Wyniki pomiarów prądu wpisać do tabeli 1.6. i tabeli 1.7.



Rys. 1.13. Układ do pomiaru prądu płynącego przez odbiornik (przełącznik P w położeniu 2) przy zmianie wartości rezystancji R_{ob} od zera do wartości maksymalnej

Tab. 1.6

I _{z1} = V; G _{w(1)} = Ω;								
Pomiary			Obliczenia					
Lp.	R _{ob}	I ₍₁₎	G _{ob}	U ₍₁₎	P _{c(1)}	P _{w(1)}	P _{uż(1)}	η ₍₁₎
	Ω	A	S	V	W	W	W	-
1								
2								
...								

Tab. 1.7

I _{z2} = V; G _{w(2)} = Ω;								
Pomiary			Obliczenia					
Lp.	R _{ob}	I ₍₂₎	G _{ob}	U ₍₂₎	P _{c(2)}	P _{w(2)}	P _{uż(2)}	η ₍₂₎
	Ω	A	S	V	W	W	W	-
1								
2								
...								

Opracowanie wyników pomiarów:

- na podstawie pomiaru prądu obliczyć napięcie na rezystancji odbiornika R_{ob} , moc użyteczną $P_{uż}$ odbiornika, moc na rezystancji wewnętrznej P_w , moc całkowitą P_c i sprawność η układu; wyniki obliczonych wartości napięcia i mocy użytecznej wpisać do tabel 1.6 i 1.7, ponadto wykonać wykresy:
 - $I = f(R_{ob})$, $U = f(R_{ob})$, $P_{uż} = f(R_{ob})$,
 - $I = f(G_{ob})$, $U = f(G_{ob})$, $P_{uż} = f(G_{ob})$,
 - $U = f(I)$
- porównać otrzymane wykresy z uzyskanymi w pkt. 1.2.2 i w pkt. 1.2.3, opracować wnioski,
- w oparciu o wyniki pomiarów i obliczeń zamieszczonych w tabelach 1.6 i 1.7 wykonać wykresy następujących zależności:
 - $P_c = f(R_{ob})$, $P_w = f(R_{ob})$
 - $\eta = f(R_{ob})$
- porównać otrzymane wykresy z uzyskanymi w pkt. 1.2.3.

1.2.5. Opracowanie wniosków z ćwiczenia

Uzasadnić otrzymane wyniki pomiarów i obliczeń oraz sporządzone wykresy. Porównać wyniki pomiarów z wynikami obliczeń. Opracować wnioski z wykonanego ćwiczenia.